

## ترجمة تعليمية غير رسمية إلى العربية

أمامكم ترجمة إلى العربية لامتحان البجروت العبري، بأسلوب النماذج العربية الرسمية، للتدرب. النص الأصلي: 035571 (شتاء 2023). حقوق الطبع لنص الامتحان الأصلي لدولة إسرائيل - وزارة التربية والتعليم. هذه الترجمة ليست نسخة رسمية، وعند أي اختلاف يُعتمد النص العبري الأصلي.

ترجمة وإعداد: الأستاذ خالد خطيب · رياضيات مع خالد · mathbagrut.com

نوع الامتحان: بجروت

موعد الامتحان: شتاء 2023

رقم النموذج: 35571

ملحق: لوائح قوانين ل 5 وحدات تعليمية

## الرياضيات

## المناهج الجديد

## 5 وحدات تعليمية - النموذج الأول

## تعليمات

- أ. مدّة الامتحان: ثلاث ساعات ونصف.
- ب. مبنى النموذج وتوزيع الدرجات: في هذا النموذج ثلاثة فصول، فيها ثمانية أسئلة: الأول: «أسئلة قصيرة»، متتاليات واحتمال. الثاني: هندسة وحساب مثلثات في المستوى. الثالث: تفاضل وتكامل لكثيرات الحدود ولدوال الجذر ولدوال النسبية والمثلثية. أجبوا عن خمسة أسئلة حسب اختياركم؛ لكل سؤال 20 درجة، والمجموع 100 درجة.
- ج. موادّ مساعدة يُسمح استعمالها:
- (1) حاسبة غير بَيّانية. لا يُسمح استعمال إمكانيّات البرمجة في الحاسبة التي توجد فيها إمكانيّة برمجة. استعمال الحاسبة البيّانية أو إمكانيّات البرمجة في الحاسبة قد يؤدي إلى إلغاء الامتحان.
- (2) لوائح قوانين (مرفقة بالنموذج الأصلي).
- د. تعليمات خاصّة:
- (1) لا تنسخوا السؤال؛ اكتبوا رقه فقط.
- (2) يجب البدء بحلّ كلّ سؤال في صفحة جديدة. يجب كتابة خطوات الحلّ في دفتر الامتحان، حتّى عندما تجري الحسابات بواسطة الحاسبة.
- يجب تفسير جميع الخطوات، بما في ذلك الحسابات، بالتفصيل وبوضوح وبترتيب. عدم التفصيل قد يؤدي إلى خصم درجات أو إلى إلغاء الامتحان.

يجب الكتابة في دفتر الامتحان فقط. يجب كتابة "مسودة" في رأس كلّ صفحة تُستعمل كمسودة. كتابة مسودة في أوراق خارج دفتر الامتحان قد تؤدي إلى إلغاء الامتحان.

الأسئلة في هذا النموذج ترد بصيغة الجمع، ورغم ذلك يجب على كلّ طالبة وطالب الإجابة عنها بشكل فرديّ.

نتمنى لكم النجاح!

## الأسئلة

انتبهوا: فسّروا كلّ خطواتكم، بما في ذلك الحسابات، بالتفصيل وبشكل واضح.  
عدم التفصيل قد يؤديّ إلى خصم درجات أو إلى إلغاء الامتحان.  
أجيبوا عن خمسة من الأسئلة 1-8 (لكلّ سؤال - 20 درجة).  
انتبهوا: إذا أجبتم عن أكثر من خمسة أسئلة، تُفحص فقط الإجابات الخمس الأولى التي في دفتركم.

1. الفصل الأول - «أسئلة قصيرة»، متتاليات واحتمال

أجيبوا عن ثلاثة من البنود الأربعة أ-د. إذا أجبتُم عن أكثر من ثلاثة بنود، تُفحص الإجابات الثلاث الأولى فقط.  
أ. معلوم أنه لكل عدد طبيعي  $n$  تتحقق:

$$1 \cdot 2 + 4 \cdot 7 + 7 \cdot 12 + \dots + (3n - 2)(5n - 3) = n(5n^2 - 2n - 1)$$

(1) احسبوا قيمة التعبير  $7 \cdot 12 + 10 \cdot 17 + \dots + 58 \cdot 97$

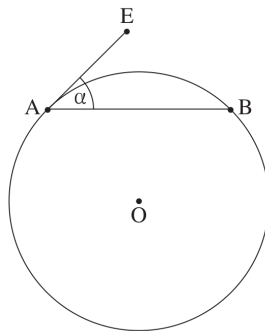
(2) معلوم أنه لكل عدد طبيعي  $n$  تحقق:

$$1 \cdot 2 + 4 \cdot 7 + 7 \cdot 12 + \dots + (3n - 2)(5n - 3) + (3n + 1)(5n + 2)$$

$$= (n + 1)(5n^2 + 8n + C)$$

جدوا قيمة C.

ب. تقع النقطة A على دائرة مركزها O. نمرّر مماسًا للدائرة في A يصنع زاوية مقدارها  $\alpha$  درجة مع الوتر AB (انظروا الرسم).



(1) عبّروا بدلالة  $\alpha$  عن الزاوية AOB.

(2) عرّوا بدلالة  $\alpha$  عن النسبة بين طول القوس الصغير AB ومحيط الدائرة.

ج. معطى الدالة  $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x}$ ، المعرفة لكل  $x \neq 0$ .

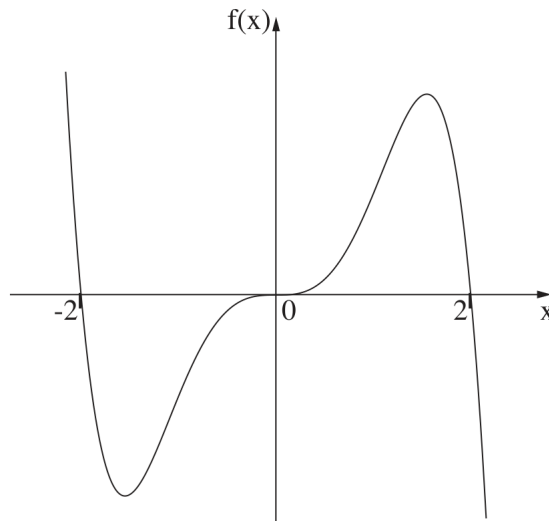
(1) جدوا معادلات خطوط التقارب العمودية على المحاور للدالة  $f(x)$ .

(2) معطى الدالة  $g(x) = k \cdot f(x + 3)$ ، حيث  $k > 0$  بارامتر. جدوا قيمة  $k$  التي يكون عندها البعد بين خطّي التقارب الأفقيين للدالة  $g(x)$  مساوياً لـ 10. علّلوا إجابتكم.

البند د في الصفحة التالية.

1. تابع السؤال 1 - البند د

د. الدالة  $f(x)$  فردية ومعرفة لكل  $x$ . الرسم الآتي يصفها.



معطى الدالة  $g(t)$  المعرفة في المجال  $-2 \leq t \leq 2$  والتي تحقق:

$$g(t) = \int_{-2}^t f(x) \, dx$$

- (1) حدّدوا المجال الذي تتناقص فيه الدالة  $g(t)$ .
- (2) هل توجد قيم  $t$  في المجال  $-2 \leq t \leq 2$  تكون عندها  $g(t)$  موجبة؟ علّلوا إجابتكم.
- (3) هل توجد نقاط التواء للدالة  $g(t)$ ؟ علّلوا إجابتكم.

2. معطى متتالية هندسية لا نهائية  $A$  حدّها العام  $a_n$  وأساسها  $q$ .

نبني متتالية جديدة  $B$  حدّها العام  $b_n = a_n \cdot q^{n-1}$ .

أ. أثبتوا أنّ  $B$  متتالية هندسية أيضاً.

ب. حدّدوا بالنسبة إلى كلّ عبارة ممّا يأتي هل هي صحيحة أم غير صحيحة، وعلّلوا.

(1) إذا كانت  $A$  غير متقاربة، فبالضرورة  $B$  غير متقاربة أيضاً.

(2) إذا كانت  $A$  متناقصة، فبالضرورة تكون متقاربة أيضاً.

معطى أنّ المتتاليتين متقاربتان، وأنّ النسبة بين مجموع جميع حدود  $B$  ومجموع جميع حدود  $A$  هي  $\frac{3}{5}$ .

ج. جدوا  $q$ .

معطى أنّ  $n$  عدد طبيعيّ يحقق:

$$\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \frac{b_3}{a_3} + \dots + \frac{b_n}{a_n} = \frac{2059}{729}$$

د. جدوا  $n$ .

3. في محلّ فواكه صناديق تحتوي على فواكه. في الصندوق أ a ثمرة: ثلاث تفّاحات والباقي إجاص. في الصندوق ب b ثمرة: خمس تفّاحات والباقي إجاص.

أ. بعد ذلك نُخرج عشوائياً ثمرة من الصندوق ب، وإذا كانت إجاصة نعيدها إلى الصندوق

أ. عبّروا بدلالة a و b عن احتمال أن تكون الثمرتان اللتان خرجتا تفّاحتين.

معطى أنّ احتمال خروج تفّاحتين هو  $\frac{9}{65}$ ، واحتمال خروج تفّاحة ثمّ إجّاصة هو  $\frac{21}{130}$ .

ب. جدوا a و b.

ج. معلوم أنّ الثمرة الأولى التي خرجت كانت تفّاحة. ما هو احتمال أن تكون الثمرة الثانية إجاصة؟

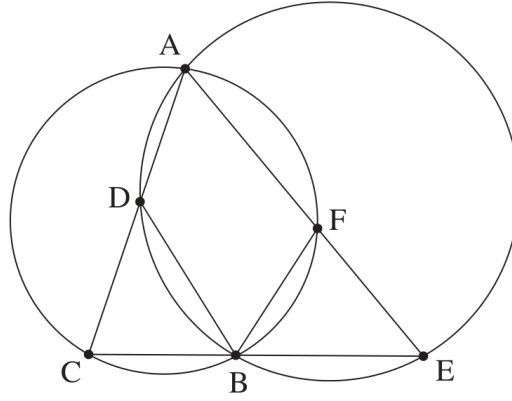
نقل جميع الفواكه من الصندوقين إلى صندوق جديد فارغ، ونُخرج منه عشوائياً ستّ ثمار، مع الإعادة.

د. ما هو احتمال أن تكون بالضبط أربع ثمار من الستّ تفّاحات، أو أن تكون الثمار الستّ إجاصاً؟

هـ. معلوم أن أربعاً بالضبط من الثمار الست هي تفّاحات. ما هو احتمال خروج التفّاحات الأربع بشكل متتال؟

## 4. الفصل الثاني - هندسة وحساب مثلثات في المستوى

نتقاطع دائرتان في النقطتين A و B (انظروا الرسم).  
 الوتر AC في الدائرة اليسرى يقطع الدائرة اليمنى في D. الوتر AE في الدائرة اليمنى يقطع الدائرة اليسرى في F. القطعة CE تمر بالنقطة B.



أ. أثبتوا أن  $\triangle ACE \sim \triangle BCD$ .

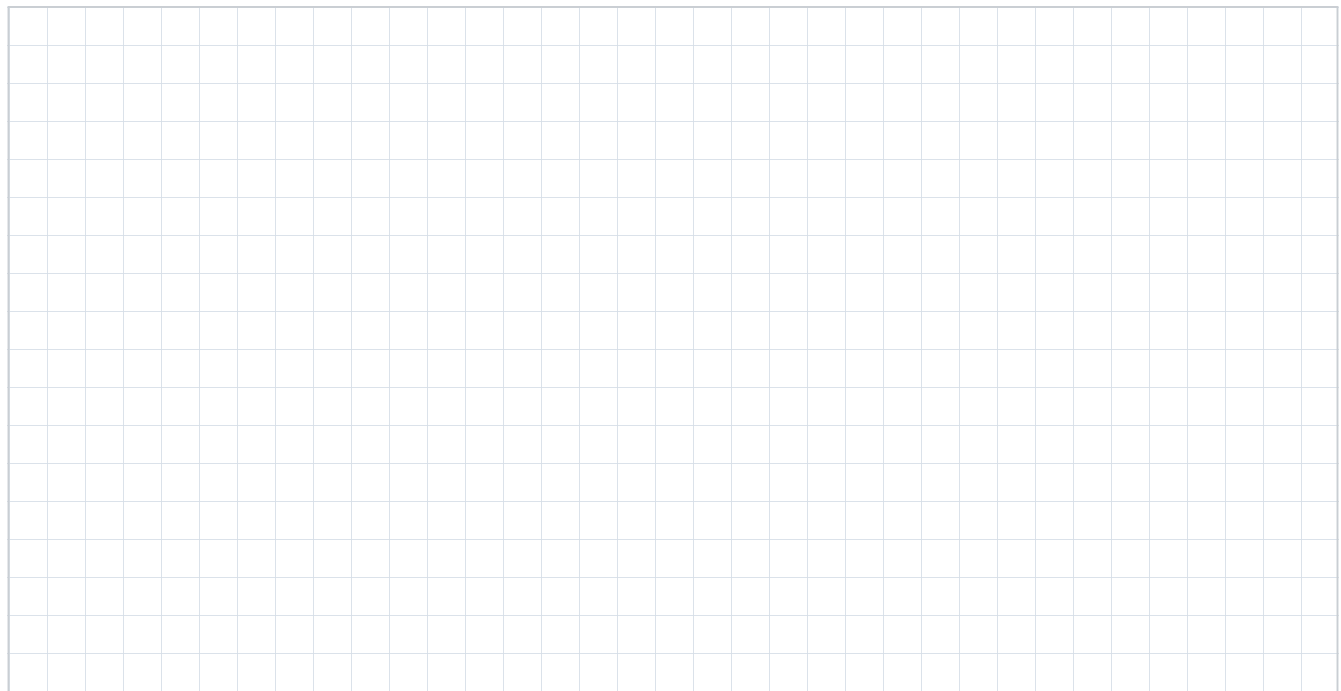
معطى:  $DC = FE$ .

ب. أثبتوا أن  $\triangle BFE \cong \triangle BCD$ .

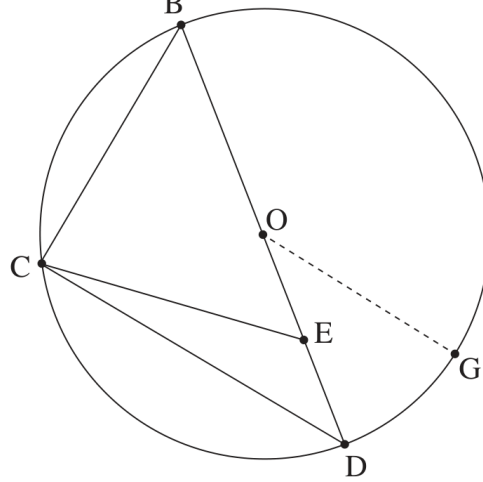
ج. (1) أثبتوا أن  $AC \cdot BE = AE \cdot BC$ .

(2) أثبتوا أن AB ينصف الزاوية CAE.

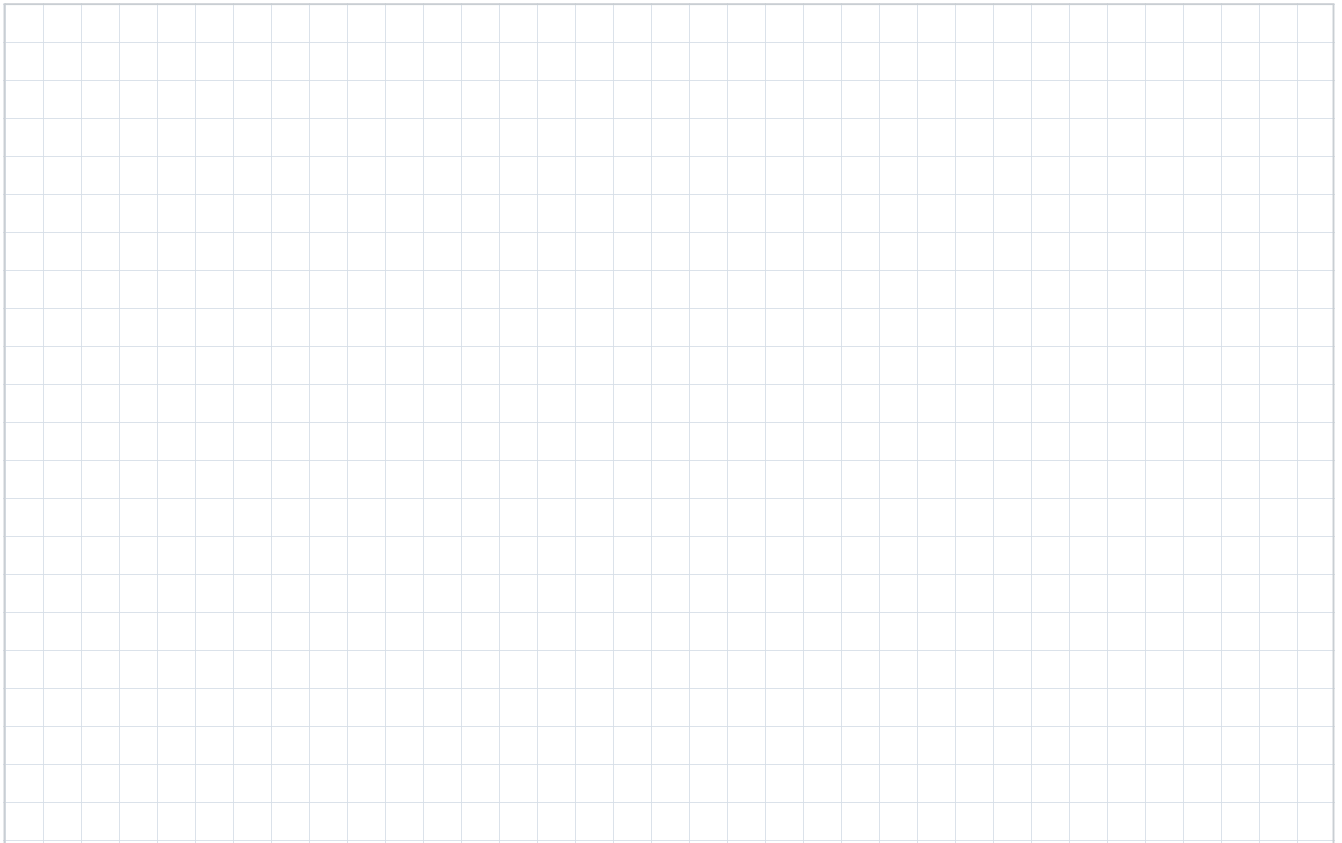
د. أثبتوا أن  $\angle DEC = \angle FCE$ .



5. المثلث BCD محصور في دائرة مركزها O ونصف قطرها R. النقطتان O و E تقعان على الضلع BD بحيث  $OE = ED$  (انظروا الرسم).  
نرمز:  $CD = m$ ،  $\angle CDB = \alpha$ .



- أ. عبّروا عن  $\cos \alpha$  بدلالة  $m$  و  $R$ .  
ب. أثبتوا أنّ  $CE = \frac{1}{2}\sqrt{(2m^2 + R^2)}$ .  
معطى:  $BC = EC$ .  
ج. جدوا  $\alpha$ .  
نمرّ نصف القطر OG الموازي لـ  $CD$ ، كما في الرسم.  
د. جدوا مقدار الزاوية OEG.



## 6. الفصل الثالث - تفاضل وتكامل

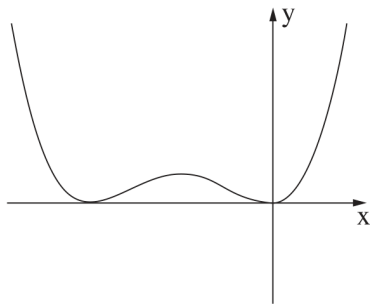
معطى الدالة  $f(x) = x^n \cdot (x + 1)^2$ ، حيث  $n > 1$  عدد طبيعي. الدالة معرفة لكل  $x$ .

أ. جدوا إحداثيات نقاط تقاطع رسم  $f(x)$  مع المحاور.

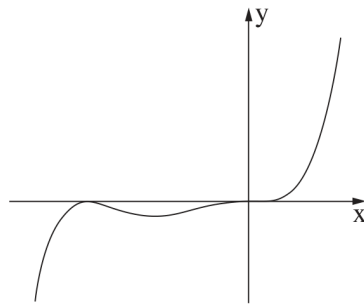
ب. جدوا مجالات الإيجابية والسلبية للدالة  $f(x)$ ، إن وجدت. ميزوا بين  $n$  الزوجي والفردى.

ج. جدوا الإحداثيات  $x$  لنقاط النهاية القصوى للدالة  $f(x)$  وحددوا نوعها. عبّروا بدلالة  $n$  عند الحاجة، وميزوا بين  $n$  الزوجي والفردى.

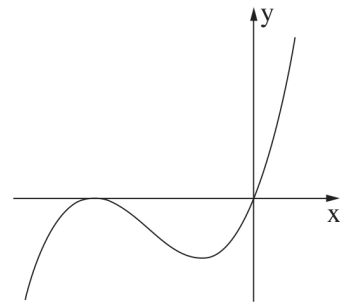
أمامكم الرسوم I-III. أحدها يصف  $f(x)$  عندما  $n$  زوجي، وآخر يصفها عندما  $n > 1$  وفردى.



III



II

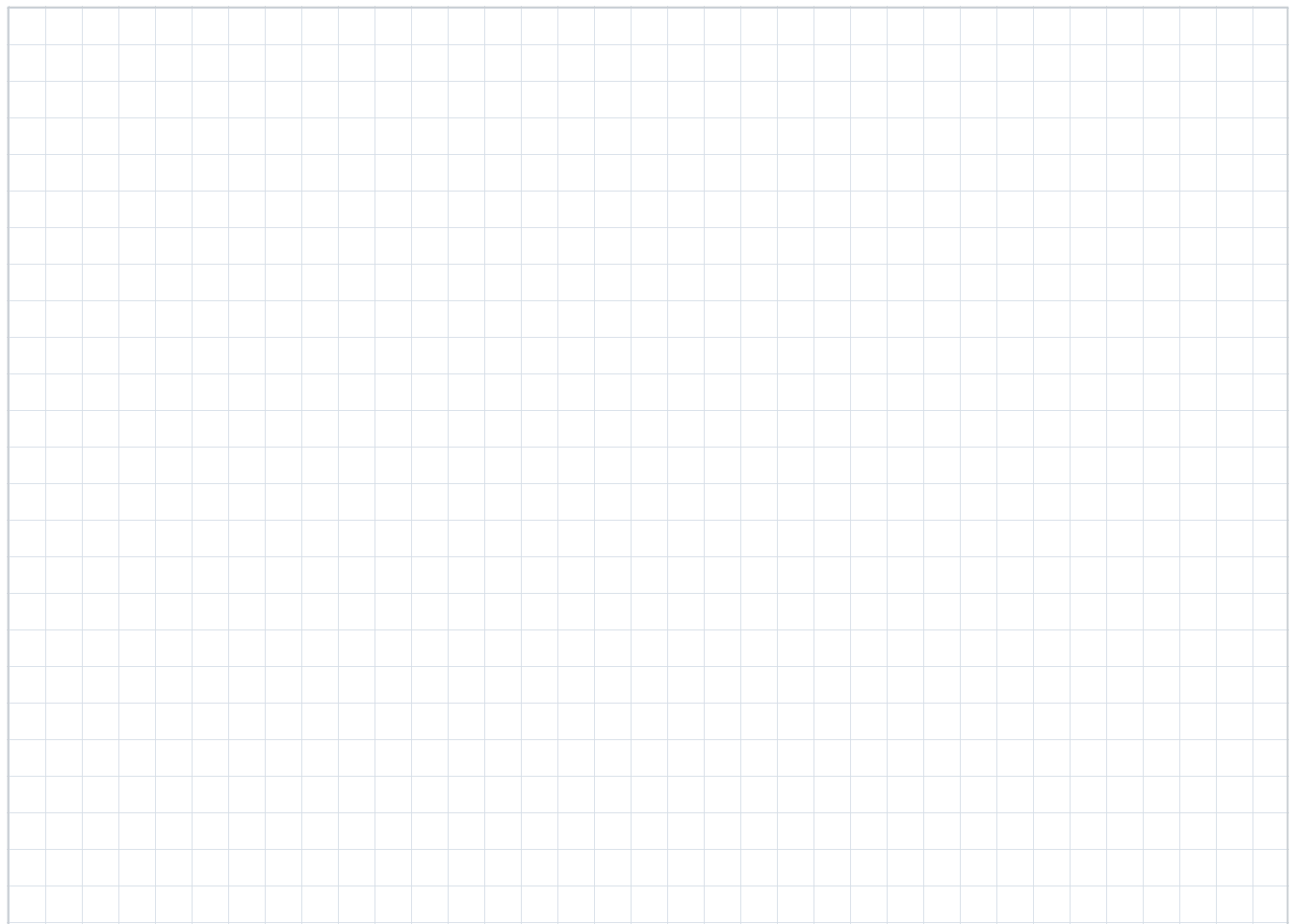


I

د. حدّدوا الرسم المناسب لكل حالة، وعلّلوا اختياركم.

معطى الدالة  $g(x) = a \cdot f(x - 2)$ ، حيث  $a$  بارامتر موجب. نرمز بـ  $T$  إلى المساحة المحصورة بين رسم  $g(x)$  ومحور  $x$ .

هـ. عبّروا بدلالة  $a$  و  $T$  عن المساحة المحصورة بين رسم  $f(x)$  ومحور  $x$ . علّلوا إجابتكم.



7. معطى الدالة  $f(x) = \frac{2 \sin x}{\cos^2 x - 1}$  في المجال  $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ .

أ. (1) جدوا مجال تعريف  $f(x)$ .

(2) جدوا معادلات خطوط التقارب العمودية على محور  $x$  للدالة  $f(x)$ .

(3) هل الدالة زوجية، أم فردية، أم ليست زوجية وليست فردية؟ أثبتوا إجابتكم.

ب. أجبوا عن البندين الآتيين في المجال  $0 \leq x \leq 2\pi$ :

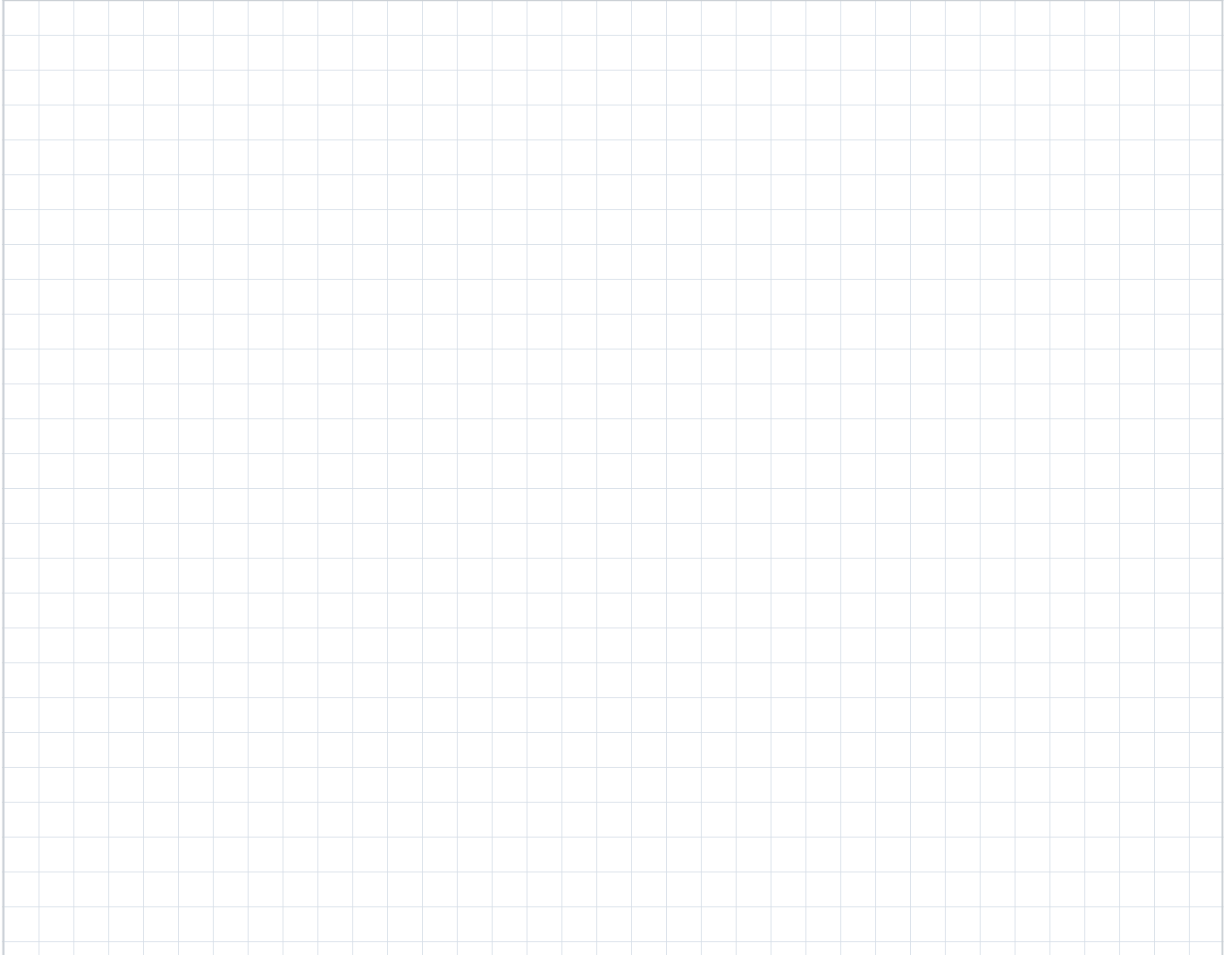
(1) جدوا إحداثيات نقاط تقاطع الرسم مع المحاور، إن وجدت.

(2) جدوا إحداثيات نقاط النهاية القصوى للدالة وحددوا نوعها.

ج. ارسموا رسماً تقريبياً للدالة  $f(x)$  في المجال  $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ .

د. أثبتوا أنه لا توجد نقاط التواء للدالة  $f(x)$ .

هـ. احسبوا المساحة المحصورة بين رسم دالة المشتقة  $f'(x)$  ومحور  $x$  في المجال  $1.7 \leq x \leq 2$ .



8. أمامكم ثلاث دوال، لكل منها قيمتان لـ  $x$  تكون غير معروفة عندهما:

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{(x + 1)(x + 2)}, \quad h(x) = \frac{x^3}{x(x + 2)}, \quad k(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2(x + 2)}$$

معلوم أن إحدى الدوال لها خطّ تقارب أفقيّ واحد وخطّ تقارب عموديّ واحد فقط.

أ. حدّدوا الدالة التي تتحقّق جميع هذه الصفات، وعلّلوا اختياركم.

أجيبوا عن البنود ب-د للدالة التي حدّدتموها في أ.

ب. (1) جدوا معادلة خطّ التقارب الأفقيّ ومعادلة خطّ التقارب العموديّ للدالة.

(2) جدوا إحداثيات نقاط تقاطع الرسم مع المحاور.

معطى أنّه لا توجد نقاط نهاية قصوى لهذه الدالة.

ج. ارسّموا رسماً تقريبياً للدالة.

نرمز بـ  $A$  إلى نقطة على رسم الدالة عند  $x = t$ ، حيث  $-1 < t < 1$ . من  $A$  نمرّر مستقيمين؛ أحدهما عموديّ على محور

$x$  والآخر عموديّ على خطّ التقارب العموديّ. يتكوّن مستطيل من المستقيمين وخطّ التقارب العموديّ ومحور  $x$ .

د. جدوا قيمة  $t$  التي يكون عندها محيط المستطيل أصغر ما يمكن. يمكن إبقاء جذر في الإجابة.