

حلول امتحان البجروت 472

صيف 2026 . الموعد ب . النسخة أ

حل أسئلة الامتحان كاملة بخطوات حسابية وتعليقات مفصلة

اختاروا ثلاثة أسئلة من الأسئلة الخمسة حسب اختياركم، وفق تعليمات هذه الدورة.

تتضمن هذه النسخة ورقة كل سؤال، ثم المعطيات والقوانين والتعويض وترتيب الحساب والجواب النهائي. جدول التغير أفقي، والتعويضات موضحة تحته.

يمكن استعمالها مستقلة عن البيئة التفاعلية.

حقوق النشر والطباعة | mathbagrut.com

© 2026 mathbagrut.com — حقوق الشرح والحلول والتصميم محفوظة. يُسمح بالتنزيل والطباعة للتعلم الشخصي أو الصفي مع إبقاء اسم الموقع. إعادة النشر أو البيع أو إزالة النسبة تحتاج إذنًا خطيًا. حقوق نصوص الأسئلة الأصلية ورسومها لأصحابها.

ورقة الأسئلة عربية رسمية من وزارة التربية والتعليم. الحلول والرسوم التوضيحية من إعداد mathbagrut.com وليست حلولاً رسمية للوزارة.

السؤال 1 . جمع الزجاجات وتمويل حفلة نهاية السنة

الرياضيات، صيف 2026، الموعد "ب"، رقم 35472 + ملحق

الأسئلة

أجبوا عن ثلاثة من الأسئلة 1-5. (لكل سؤال $33\frac{1}{3}$ درجة).
انتبهوا: إذا أجبتم عن أكثر من ثلاثة أسئلة، تُفحص فقط الإجابات الثلاث الأولى التي في دفتركم.

الفصل الأول: المتواليات والهندسة في الفراغ والتزايد والتضاؤل

1. قرّر طلاب الصفّ الثاني عشر "أ" وطلاب الصفّ الثاني عشر "ب" في مدرسة معيّنة تنظيم حفلة نهاية السنة. لتمويل تكلفة الحفلة، جمع الطلاب خلال عدّة أسابيع زجاجات فارغة، ونقلوها إلى إعادة التدوير مقابل المال. جمع طلاب الصفّ الثاني عشر "أ" زجاجات لمدة 5 أسابيع. عدد الزجاجات التي جمعوها في كلّ أسبوع هو q أضعاف عدد الزجاجات التي جمعوها في الأسبوع الذي قبله. عدد الزجاجات التي جمعها طلاب الصفّ الثاني عشر "أ" في الأسبوع الرابع هو 3.375 أضعاف عدد الزجاجات التي جمعوها في الأسبوع الأول.
أ. جدوا قيمة q .
- ب. العدد الكليّ للزجاجات التي جمعها طلاب الصفّ الثاني عشر "أ" في الأسبوع الأول وفي الأسبوع الأخير كان 2,425.
ب. جدوا عدد الزجاجات التي جمعها طلاب الصفّ الثاني عشر "أ" في الأسبوع الأول.
- ج. جمع طلاب الصفّ الثاني عشر "ب" زجاجات لمدة 18 أسبوعاً. في كلّ أسبوع، جمعوا d زجاجات أكثر ممّا في الأسبوع الذي قبله.
في الأسبوع الثاني، جمع طلاب الصفّ الثاني عشر "ب" 230 زجاجة.
جمع طلاب الصفّ الثاني عشر "ب" عددًا كلياً بلغ 6,300 زجاجة.
ج. جدوا قيمة d .
- د. مقابل كلّ زجاجة نقلوها إلى إعادة التدوير، حصل الطلاب على 0.3 شيكل.
تكلفة حفلة نهاية السنة هي 3,400 شيكل.
هل المبلغ الكليّ الذي حصل عليه طلاب الصفّين من إعادة تدوير جميع الزجاجات يكفي لتمويل تكلفة الحفلة؟ علّلوا اجابته.

البند أ

جدوا أساس المتوالية الهندسية q .

1 . تمثيل عدد الزجاجات بمتوالية هندسية

نرمز إلى عدد الزجاجات في الأسبوع الأول بالرمز a_1 . بما أنّ عدد الزجاجات يتضاعف في كل أسبوع بالأساس نفسه، نستعمل قانون الحد العام.

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$a_4 = a_1 q^3$$

2 . استعمال النسبة المعطاة وحل المعادلة

$$a_4 = 3.375a_1$$

$$a_1 q^3 = 3.375a_1$$

عدد الزجاجات في الأسبوع الأول موجب، ولذلك يجوز القسمة عليه.

$$q^3 = 3.375$$

$$q = \sqrt[3]{3.375} = 1.5$$

الجواب النهائي

أساس المتوالية الهندسية هو:

$$q = 1.5$$

البند ب

جدوا عدد الزجاجات التي جمعها الصف الثاني عشر في الأسبوع الأول.

1 . كتابة المعادلة وفق المعطى

$$a_5 = a_1 q^4 = a_1 (1.5)^4 = 5.0625a_1$$

$$a_1 + a_5 = 2425$$

2 . التعويض وترتيب المعادلة

$$a_1 + 5.0625a_1 = 2425$$

$$6.0625a_1 = 2425$$

$$a_1 = \frac{2425}{6.0625} = 400$$

للتحقق: في الأسبوع الخامس جُمعت 2025 زجاجة، ومجموع الأسبوعين هو العدد المعطى.

$$a_5 = 400(1.5)^4 = 2025$$

$$400 + 2025 = 2425$$

الجواب النهائي

جُمع في الأسبوع الأول 400 زجاجة.

$$a_1 = 400$$

البند ج

جدوا فرق المتوالية الحسابية d للصف الثاني عشر ب.

1 . تحديد المتوالية والمعطيات

نرمز إلى عدد زجاجات الصف ب في الأسبوع الأول بالرمز b_1 . الزيادة بعدد ثابت تعني أنَّ المتوالية حسابية.

$$b_2 = b_1 + d = 230$$

$$b_1 = 230 - d$$

$$n = 18, \quad S_{18} = 6300$$

2 . التعويض في قانون مجموع متوالية حسابية

$$S_n = \frac{n}{2} [2b_1 + (n - 1)d]$$

$$6300 = \frac{18}{2} [2(230 - d) + 17d]$$

3 . فتح الأقواس وحل المعادلة

$$6300 = 9(460 - 2d + 17d)$$

$$6300 = 9(460 + 15d)$$

$$700 = 460 + 15d$$

$$240 = 15d$$

$$d = 16$$

للتحقق، الحد الأول هو 214 والحد الأخير هو 486.

$$b_1 = 230 - 16 = 214$$

$$b_{18} = 214 + 17 \cdot 16 = 486$$

$$S_{18} = \frac{18(214 + 486)}{2} = 6300$$

الجواب النهائي

جمع الصف ب كل أسبوع 16 زجاجة أكثر من الأسبوع السابق.

$$d = 16$$

البند د

هل تكفي العائدات لتغطية تكلفة الحفلة؟ عللوا إجابتكم.

1 . مجموع الزجافات التي جمعها الصف أ

$$S_5 = a_1 \frac{q^5 - 1}{q - 1}$$

$$S_5 = 400 \cdot \frac{1.5^5 - 1}{1.5 - 1}$$

$$S_5 = 400 \cdot \frac{7.59375 - 1}{0.5}$$

$$S_5 = 400 \cdot 13.1875 = 5275$$

2 . حساب العائدات ومقارنتها بالتكلفة

$$N_{\text{total}} = 5275 + 6300 = 11575$$

$$R = 11575 \cdot 0.3 = 3472.5$$

$$3472.5 - 3400 = 72.5$$

العائدات أكبر من تكلفة الحفلة، ولذلك تكفي لتغطيتها.

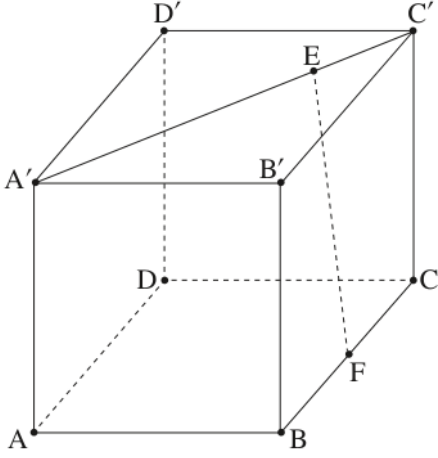
الجواب النهائي

نعم، تكفي العائدات؛ يتبقى 72.5 شيكل بعد تغطية التكلفة.

$$R = 3472.5, \quad 3472.5 - 3400 = 72.5$$

السؤال 2 . متجهات في صندوق قاعدته مربع

الرياضيات، صيف 2026، الموعد "ب"، رقم 35472 + ملحق



2. في الرسم الذي أمامكم الصندوق $ABCD A' B' C' D'$

الذي قاعدته $ABCD$ هي مربع .

النقطة F هي منتصف الضلع BC .

النقطة E تقع على القطر $A' C'$ ، بحيث يتحقق $\overrightarrow{A' E} = \frac{3}{4} \overrightarrow{A' C'}$.

نرمز : $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$ ، $\overrightarrow{BC} = \underline{v}$ ، $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.

أ . عبّروا بدلالة $\underline{u}$ و $\underline{v}$ و $\underline{w}$ عن المتجهين $\overrightarrow{A' E}$ و $\overrightarrow{FE}$.

معطى أن طول ضلع القاعدة هو 4 .

ب . احسبوا طول المتجه $\overrightarrow{A' E}$.

معطى أن : $|\overrightarrow{A' E}| = |\overrightarrow{FE}|$.

جـ . بيّنوا أن الصندوق هو مكعب .

د . (1) بيّنوا أن $\overrightarrow{FE}$ يعامد $\overrightarrow{A' C'}$.

(2) احسبوا مساحة المثلث $A' FC'$.

البند أ

عبّروا عن المتجهين $A'E$ و FE بدلالة u و v و w .

1 . تحديد الاتجاهات والقطر العلوي

$$\overrightarrow{AB} = \underline{u}, \quad \overrightarrow{BC} = \underline{v}, \quad \overrightarrow{AA'} = \underline{w}$$

$$\overrightarrow{A' C'} = \underline{u} + \underline{v}$$

$$\overrightarrow{A' E} = \frac{3}{4} \overrightarrow{A' C'} = \frac{3}{4} \underline{u} + \frac{3}{4} \underline{v}$$

2 . اختيار مسار من F إلى E

نختار المسار من F إلى C، ثم إلى C'، ثم إلى E. لأن F منتصف BC فإن المتجه FC نصف المتجه BC.

$$\overrightarrow{FC} = \frac{1}{2}\vec{v}, \quad \overrightarrow{CC'} = \vec{w}$$

$$\overrightarrow{C'E} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{A'C'} = -\frac{1}{4}\vec{u} - \frac{1}{4}\vec{v}$$

$$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'E}$$

$$\overrightarrow{FE} = \frac{1}{2}\vec{v} + \vec{w} - \frac{1}{4}\vec{u} - \frac{1}{4}\vec{v}$$

$$\overrightarrow{FE} = -\frac{1}{4}\vec{u} + \frac{1}{4}\vec{v} + \vec{w}$$

الجواب النهائي

$$\overrightarrow{A'E} = \frac{3}{4}\vec{u} + \frac{3}{4}\vec{v}$$

$$\overrightarrow{FE} = -\frac{1}{4}\vec{u} + \frac{1}{4}\vec{v} + \vec{w}$$

البند ب

احسبوا طول المتجه A'E.

1 . استعمال التعامد في الصندوق

لأن قاعدة الصندوق مربع، فإن u و v متعامدان وطول كل منهما 4. نكتب مربع طول المتجه باستعمال الضرب العددي.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0, \quad |\vec{u}| = |\vec{v}| = 4$$

$$|\overrightarrow{A'E}|^2 = \left(\frac{3}{4}\vec{u} + \frac{3}{4}\vec{v}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\vec{u} + \frac{3}{4}\vec{v}\right)$$

2 . فتح الضرب العددي والتعويض

$$|\vec{A'E}|^2 = \frac{9}{16}|\vec{u}|^2 + \frac{18}{16}\vec{u} \cdot \vec{v} + \frac{9}{16}|\vec{v}|^2$$

$$|\vec{A'E}|^2 = \frac{9}{16} \cdot 16 + 0 + \frac{9}{16} \cdot 16 = 18$$

$$|\vec{A'E}| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

الجواب النهائي

طول المتجه هو:

$$|\vec{A'E}| = 3\sqrt{2}$$

البند ج

يَبْنُوا أَنَّ الصندوق مكعب، مع استعمال تساوي طولي A'E و FE.

1 . كتابة مربع طول FE

نرمز إلى طول ارتفاع الصندوق بالرمز h . المتجهات u و v و w متعامدة اثنين اثنين؛ لذلك تحتفي جميع الحدود المختلطة في مربع الطول.

$$h = |\vec{w}| > 0$$

$$|\vec{FE}|^2 = \left| -\frac{1}{4}\vec{u} + \frac{1}{4}\vec{v} + \vec{w} \right|^2$$

$$|\vec{FE}|^2 = \frac{1}{16}|\vec{u}|^2 + \frac{1}{16}|\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2$$

$$|\vec{FE}|^2 = \frac{16}{16} + \frac{16}{16} + h^2 = 2 + h^2$$

2 . استعمال تساوي الطولين والاستنتاج

$$|\overrightarrow{FE}| = |\overrightarrow{A'E}| = \sqrt{18}$$

$$2 + h^2 = 18$$

$$h^2 = 16$$

$$h = 4$$

ارتفاع الصندوق 4، وطولا ضلعي القاعدة 4 و4؛ أي إن أبعاده الثلاثة متساوية، ولذلك هو مكعب.

الجواب النهائي

$$|\vec{u}| = |\vec{v}| = |\vec{w}| = 4$$

الصندوق مكعب.

البند د (1)

بينوا أن FE يعامد A'C.

1 . حساب الضرب العددي

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{A'C'} &= \left(-\frac{1}{4}\vec{u} + \frac{1}{4}\vec{v} + \vec{w} \right) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) \\ &= -\frac{1}{4}|\vec{u}|^2 - \frac{1}{4}\vec{u} \cdot \vec{v} + \frac{1}{4}\vec{v} \cdot \vec{u} + \frac{1}{4}|\vec{v}|^2 + \vec{w} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{v} \\ &= -\frac{1}{4} \cdot 16 + 0 + 0 + \frac{1}{4} \cdot 16 + 0 + 0 \\ &= -4 + 4 = 0\end{aligned}$$

2 . الاستنتاج الهندسي

الضرب العددي يساوي صفراً، والمتجهان غير صفريين، ولذلك FE يعامد القطر A'C.

الجواب النهائي

$$\overrightarrow{FE} \perp \overrightarrow{A'C'}$$

البند د (2)

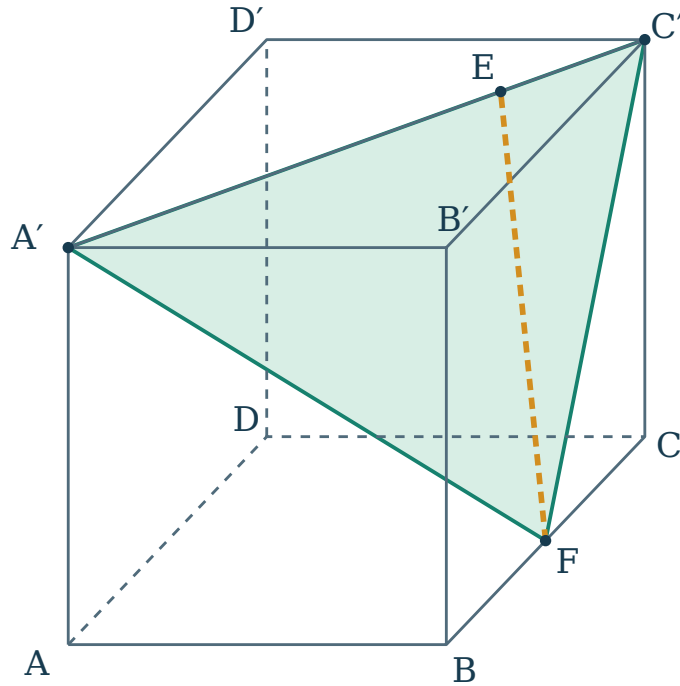
احسبوا مساحة المثلث A'FC.

1. تحديد القاعدة والارتفاع

بما أنّ E على القطعة A'C وثبت أنّ FE يعامدها، فإنّ FE ارتفاع المثلث من F. نحسب طول القاعدة باستعمال فيثاغورس في الوجه العلوي.

$$|A'C'| = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$|FE| = 3\sqrt{2}$$



القطر العلوي هو القاعدة، و FE هو الارتفاع. الرسم إسقاط توضيحي للجسم.

2 . التعويض في قانون مساحة مثلث

$$S_{\triangle A'FC'} = \frac{1}{2} \cdot |A'C'| \cdot |FE|$$

$$S_{\triangle A'FC'} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2}$$

$$S_{\triangle A'FC'} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 2 = 12$$

الجواب النهائي

مساحة المثلث 12 وحدة مربعة.

$$S_{\triangle A'FC'} = 12$$

السؤال 3 . تغيير أعداد البطاريق بمرور الزمن

3. تعيش بطاريق في المنطقة A . منذ مطلع سنة 2000 ، عدد البطاريق في هذه المنطقة يتضاءل في كل سنة بنسبة مئوية ثابتة .
أ . هل الفرق بين عدد البطاريق في مطلع سنة 2000 وبين عددها في مطلع سنة 2001 مُساوٍ للفرق بين عدد البطاريق في مطلع سنة 2001 وبين عددها في مطلع سنة 2002 ؟ علّلوا إجابتكم .
- في مطلع سنة 2000 ، كان 253,000 بطريق في المنطقة A . عدد البطاريق في هذه المنطقة يتضاءل بـ 5% في كل سنة .
في المنطقة B أيضاً تعيش بطاريق . عدد البطاريق في هذه المنطقة يتضاءل في كل سنة بنسبة مئوية ثابتة .
في مطلع سنة 2000 ، كان 313,000 بطريق في المنطقة B .
في مطلع سنة 2010 ، كان عدد البطاريق في المنطقة A مساوياً لعدد البطاريق في المنطقة B .
ب . جدوا النسبة المئوية التي يتضاءل بها عدد البطاريق في المنطقة B في كل سنة .
جـ . جدوا بعد مرور كم من الزمن منذ مطلع سنة 2000 ، عدد البطاريق في المنطقة B كان 98,000 .
منذ مطلع سنة 2018 ، في أعقاب ترميم المنطقة A ، تزايد عدد البطاريق في هذه المنطقة بـ 2% في كل سنة .
د . جدوا بعد مرور كم من الزمن منذ مطلع سنة 2018 ، ازداد عدد البطاريق في المنطقة A بـ 17% عن عددها في مطلع سنة 2018 .

البند أ

هل الفرق بين عدد البطاريق في 2000 و 2001 يساوي الفرق بين عددها في 2001 و 2002؟ علّلوا.

1 . تمثيل الأعداد في السنوات الثلاث

ليكن N_0 العدد في مطلع سنة 2000، وليكن q عامل الاضمحلال السنوي. بما أنّ العدد يتضاءل، فإن q بين صفر وواحد.

$$N_0 > 0, \quad 0 < q < 1$$

$$N(0) = N_0, \quad N(1) = N_0q, \quad N(2) = N_0q^2$$

2 . مقارنة مقدارَي النقص

$$D_1 = N_0 - N_0q = N_0(1 - q)$$

$$D_2 = N_0q - N_0q^2 = N_0q(1 - q) = qD_1$$

$$0 < q < 1 \implies D_2 < D_1$$

إذن مقدار النقص في السنة الثانية أصغر؛ ثبات النسبة المئوية لا يعني ثبات الفرق العددي.

الجواب النهائي

لا، الفرقان غير متساويين؛ مقدار النقص بين 2001 و2002 أصغر.

$$D_2 = qD_1 < D_1$$

البند ب

جدوا نسبة الاضمحلال السنوية في المنطقة B.

1 . اختيار نقطة بدء الزمن وبناء النموذجين

نقيس الزمن بالسنوات منذ مطلع سنة 2000. النقص بنسبة 5% يعني ضرب العدد في 0.95 كل سنة.

$$q_A = 1 - \frac{5}{100} = 0.95$$

$$A(t) = 253000(0.95)^t$$

$$B(t) = 313000q_B^t$$

2 . استعمال تساوي العددين في مطلع 2010

$$t = 2010 - 2000 = 10$$

$$253000(0.95)^{10} = 313000q_B^{10}$$

$$q_B^{10} = \frac{253000(0.95)^{10}}{313000}$$

$$q_B = \left(\frac{253000(0.95)^{10}}{313000} \right)^{1/10}$$

$$q_B \approx 0.9299963063$$

3 . التحويل من العامل إلى النسبة المئوية

$$p_B = 100(1 - q_B)$$

$$p_B \approx 100(1 - 0.9299963063) = 7.00036937\%$$

نحتفظ بالقيمة غير المدوّرة للعامل في الحساب التالي، ونقرّب الجواب النهائي فقط.

الجواب النهائي

نسبة الاضمحلال السنوية نحو 7%.

$$p_B \approx 7\%$$

البند ج

جدوا بعد كم من الزمن منذ مطلع 2000 كان عدد البطاريق في B هو 98000.

1 . كتابة المعادلة

$$313000q_B^t = 98000$$

$$q_B^t = \frac{98000}{313000}$$

2 . أخذ اللوغاريثم وحل المعادلة

$$\ln(q_B^t) = \ln\left(\frac{98000}{313000}\right)$$

$$t \ln q_B = \ln\left(\frac{98000}{313000}\right)$$

$$t = \frac{\ln(98000/313000)}{\ln q_B}$$

$$t \approx 16.00056602$$

كل من البسط والمقام سالب، ولذلك الزمن الناتج موجب. وفق النموذج يتحقق العدد بعد نحو 16 سنة من مطلع 2000.

الجواب النهائي

بعد نحو 16 سنة، أي نحو مطلع سنة 2016.

$$t \approx 16.0$$

البند د

جدوا بعد كم من الزمن منذ مطلع 2018 ازداد العدد في A بنسبة 17%.

1 . تغيير نقطة بدء الزمن

ليكن M_0 عدد البطاريق في مطلع 2018، وليكن τ عدد السنوات منذ ذلك الموعد. لا حاجة إلى حساب M_0 لأنه سيختزل من المعادلة.

$$M(\tau) = M_0(1.02)^\tau$$

$$M(\tau) = 1.17M_0$$

2 . حل المعادلة بعد اختزال عدد البداية

$$M_0(1.02)^\tau = 1.17M_0$$

$$(1.02)^\tau = 1.17$$

$$\tau \ln(1.02) = \ln(1.17)$$

$$\tau = \frac{\ln(1.17)}{\ln(1.02)} \approx 7.928430226$$

الجواب النهائي

بعد نحو 7.93 سنوات من مطلع 2018.

$$\tau \approx 7.93$$

السؤال 4 . دالة مع پارامتر وتحويل بالقيمة المطلقة

الرياضيات، صيف 2026، الموعد "ب"، رقم 35472 + ملحق

الفصل الثاني : حساب التفاضل والتكامل للدوال الأسية واللوغريتمية

4. معطاة الدالة $f(x) = (3x^2 - a) \cdot e^x$ ، المعروفة لكل x .

a هو پارامتر.

معطى أنه توجد للدالة $f(x)$ نقطة قصوى في النقطة التي فيها $x = 1$.

أ. جدوا قيمة a .

عوضوا $a = 9$ في الدالة $f(x)$ ، وأجيبوا عن البنود "ب-هـ".

ب. جدوا إحداثيات النقاط القصوى للدالة $f(x)$ ، وحددوا نوع هذه النقاط.

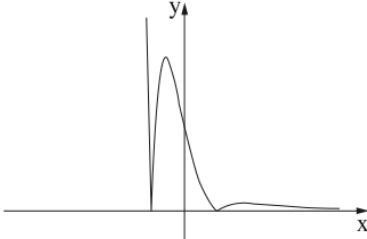
ج. جدوا إحداثيات نقاط تقاطع الرسم البياني للدالة $f(x)$ مع المحورين.

د. ارسموا رسماً بيانياً تقريبياً للدالة $f(x)$.

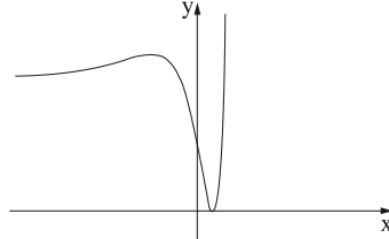
معطاة الدالة $g(x) = |f(x)|$ ، المعروفة لكل x .

هـ. (1) حددوا أيّاً من الرسوم البيانية IV-I التي أمامكم يصف الدالة $g(x)$. علّلوا تحديدكم.

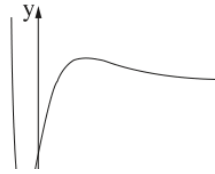
(2) جدوا إحداثيات النقاط القصوى للدالة $g(x)$ ، وحددوا نوع هذه النقاط.



I



II



البند أ

جدوا قيمة البارامتر a إذا كانت للدالة نقطة قصوى عند $x=1$.

1 . اشتقاق حاصل الضرب

$$f(x) = (3x^2 - a)e^x$$

نستعمل قاعدة مشتقة حاصل الضرب: مشتقة العامل الأول ضرب الثاني، زائد الأول ضرب مشتقة الثاني. البارامتر a ثابت.

$$f'(x) = 6xe^x + (3x^2 - a)e^x$$

$$f'(x) = e^x(6x + 3x^2 - a)$$

2. التعويض بشرط النقطة القصوى

$$f'(1) = 0$$

$$e(6 + 3 - a) = 0$$

بما أن e موجب، نقسم عليه.

$$9 - a = 0$$

$$a = 9$$

الجواب النهائي

$$a = 9$$

البند ب

جدوا إحداثيات النقاط القصوى وحددوا نوعها، بعد التعويض $a=9$.

1. إيجاد جذور المشتقة

$$f(x) = (3x^2 - 9)e^x$$

$$f'(x) = e^x(3x^2 + 6x - 9)$$

$$f'(x) = 3e^x(x^2 + 2x - 3)$$

$$f'(x) = 3e^x(x + 3)(x - 1)$$

$$f'(x) = 0 \iff (x + 3)(x - 1) = 0$$

$$x = -3, \quad x = 1$$

2. جدول إشارة المشتقة

مجال التعريف جميع الأعداد الحقيقية، والعامل $3e^x$ موجب دائماً. يبين الجدول الفترات وقيم التعويض المختارة وإشارة المشتقة والاستنتاج.

x	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, 1)$	1	$(1, \infty)$
قيمة التعويض	-4	-	0	-	2
$f'(x)$	+	0	-	0	+
سلوك الدالة	↗	عظمى	↘	صغرى	↗

جدول التغير؛ الفترات مرتبة من اليسار إلى اليمين.

$$f'(-4) = 3e^{-4}(-1)(-5) > 0$$

$$f'(0) = 3(3)(-1) = -9 < 0$$

$$f'(2) = 3e^2(5)(1) > 0$$

3. حساب الإحداثي الثاني وتحديد النوع

$$f(-3) = (3 \cdot 9 - 9)e^{-3} = 18e^{-3} = \frac{18}{e^3}$$

$$f(1) = (3 - 9)e = -6e$$

عند $x = -3$ نغير إشارة المشتقة من موجب إلى سالب، فتوجد نقطة عظمى. وعند $x = 1$ نغير من سالب إلى موجب، فتوجد نقطة صغرى.

الجواب النهائي

نقطة عظمى محلية:

$$\left(-3, \frac{18}{e^3}\right)$$

نقطة صغرى محلية:

$$(1, -6e)$$

البند ج

جدوا نقاط تقاطع الرسم البياني مع المحورين.

1. التقاطع مع محور x

$$(3x^2 - 9)e^x = 0$$

الدالة الأسية لا تساوي صفراً، ولذلك نحل معادلة العامل الآخر.

$$3x^2 - 9 = 0$$

$$x^2 = 3$$

$$x = \pm\sqrt{3}$$

2. التقاطع مع محور y

$$f(0) = (0 - 9)e^0 = -9$$

الجواب النهائي

$$(-\sqrt{3}, 0), (\sqrt{3}, 0), (0, -9)$$

البند د

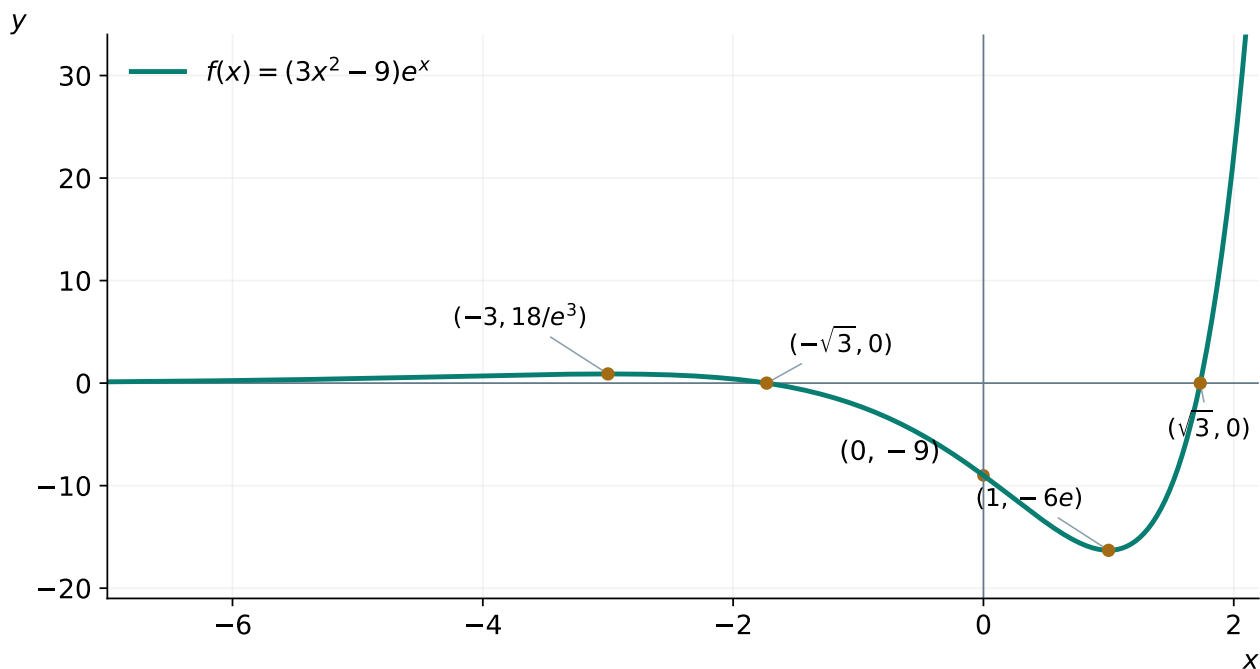
ارسموا رسماً بيانياً تقريبياً للدالة.

1. تجميع معالم الرسم

يمر المنحنى بنقطتي الصفر والنقطة $(-9, 0)$. يصعد إلى العظمى عند $x = -3$ ، ثم يهبط إلى الصغرى عند $x = 1$ ، ثم يصعد. في الطرف الأيسر يقترب من محور x من أعلى.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^2 - 9)e^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - 9)e^x = +\infty$$

2. رسم المنحنى



الرسم يوضح شكل المنحنى؛ الإحداثيات الدقيقة المذكورة في الحل.

الجواب النهائي

الرسم يحقق نقاط التقاطع وجدول التغير.

$$f(x) = (3x^2 - 9)e^x$$

البند هـ (1)

حدّدوا الرسم الذي يصف $|g(x)| = |f(x)|$ وعلّلوا.

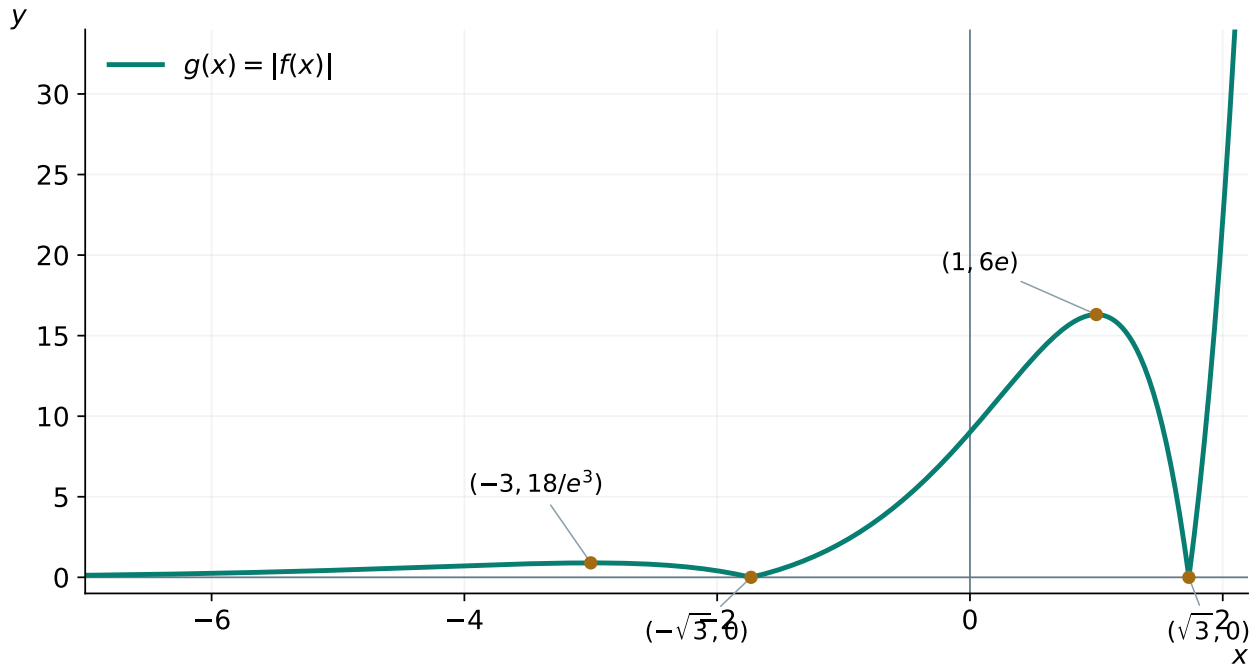
1. تحديد الجزء الذي ينعكس

$$g(x) = |f(x)| \geq 0$$

$$f(x) < 0 \iff -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$$

نعكس الجزء المحصور بين نقطتي الصفر إلى أعلى محور x ، ونبقى بقية المنحنى كما هو. لذلك تبقى العظمى اليسرى، وتتحول الصغرى عند $x=1$ إلى عظمى.

2 . مطابقة الرسم مع الاختيارات



عند الجذرين توجد زاويتان ونقطتا صغرى على محور x .

الرسم الذي يحقق هذه الصفات بين الاختيارات المعطاة هو IV.

الجواب النهائي

الرسم IV.

$$g(x) = |(3x^2 - 9)e^x|$$

البند هـ (2)

جدوا إحداثيات جميع النقاط القصوى للدالة g وحددوا أنواعها.

1 . النقاط التي تنتقل من f إلى g

العظمى الموجبة عند $x=-3$ تبقى عظمى. الصغرى السالبة عند $x=1$ تنعكس إلى نقطة عظمى بقيمة موجبة.

$$g(-3) = \frac{18}{e^3}, \quad g(1) = 6e$$

2 . النقطتان الجديدتان على محور x

عند كل من الجذرين تكون $g=0$ ، بينما g موجبة في جوارهما؛ لذا كلاهما نقطة صغرى. عدم وجود مشتقة عند الزاوية لا يمنع وجود نقطة قصوى.

$$g(-\sqrt{3}) = g(\sqrt{3}) = 0$$

الجواب النهائي

نقطتا عظمى محلية:

$$\left(-3, \frac{18}{e^3}\right), \quad (1, 6e)$$

ونقطتا صغرى مطلقة:

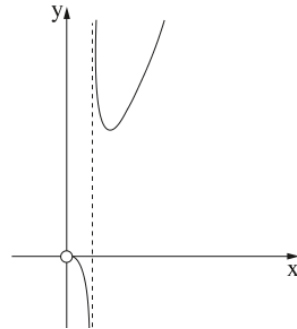
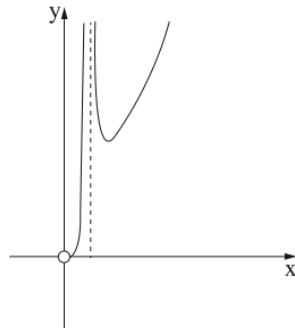
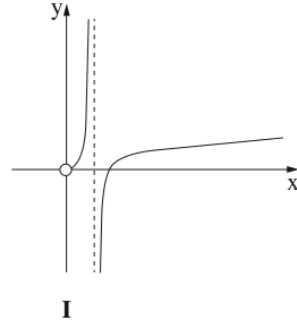
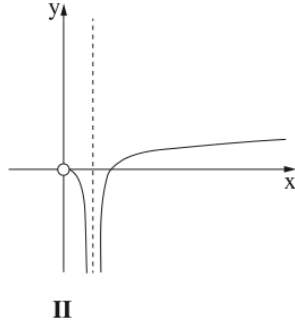
$$(-\sqrt{3}, 0), \quad (\sqrt{3}, 0)$$

السؤال 5 . دالة كسرية لوغريتمية ومساحة تحت مشتقتها

الرياضيات، صيف 2026، الموعد "ب"، رقم 35472 + ملحق

5. معطاة الدالة $f(x) = \frac{x^2}{-6 + 4\ln(x)}$.

- أ. (1) جدوا مجال تعريف الدالة $f(x)$.
 (2) جدوا معادلة خط التقارب المعامد للمحور x ، للدالة $f(x)$.
 ب. هل الرسم البياني للدالة $f(x)$ يقطع المحور x ؟ عللوا إجابتكم.
 ج. (1) جدوا إحداثيات النقطة القصوى للدالة $f(x)$ ، وحددوا نوع هذه النقطة.
 (2) جدوا مجالات تصاعد وتنازل الدالة $f(x)$.
 د. (1) حدّدوا أيّاً من الرسوم البيانية IV-I التي أمامكم يصف الدالة $f(x)$ ، وأيّاً منها يصف دالة المشتقة $f'(x)$. عللوا تحديدكم.
 (2) احسبوا المساحة المحصورة بين الرسم البياني لدالة المشتقة $f'(x)$ والمحور x والمستقيم $x = e^3$.



البند أ (1)

جدوا مجال تعريف الدالة $f(x) = x^2 / (-6 + 4\ln x)$.

1 . شرط اللوغريثم وشرط المقام

$$x > 0$$

$$-6 + 4 \ln x \neq 0$$

$$4 \ln x \neq 6$$

$$\ln x \neq \frac{3}{2}$$

$$x \neq e^{3/2}$$

2. كتابة المجال بصيغتين

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x > 0, x \neq e^{3/2}\}$$

$$D_f = (0, e^{3/2}) \cup (e^{3/2}, \infty)$$

الجواب النهائي

$$x > 0, \quad x \neq e^{3/2}$$

البند أ (2)

جدوا معادلة خط التقارب المعامد لمحور x.

1. فحص صفر المقام

$$-6 + 4 \ln x = 0 \iff x = e^{3/2}$$

$$x^2|_{x=e^{3/2}} = e^3 \neq 0$$

عند هذه القيمة يقترب المقام من صفر والبسط من عدد موجب غير صفري؛ لذلك يوجد خط تقارب عمودي.

$$\lim_{x \rightarrow (e^{3/2})^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow (e^{3/2})^+} f(x) = +\infty$$

2. فحص الطرف الآخر للمجال التعريف

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{4 \ln x - 6} = 0$$

لا يوجد خط تقارب عمودي عند $x=0$ ؛ نهاية الدالة من جهة اليمين منتهية.

الجواب النهائي

$$x = e^{3/2}$$

البند ب

هل يقطع الرسم البياني محور x ؟ علّوا.

1 . فحص إمكانية التقاطع

$$f(x) = 0 \implies x^2 = 0 \implies x = 0$$

لكن $x=0$ خارج مجال التعريف، لأن اللوغاريتم غير معرف عنده. إذن لا توجد نقطة تقاطع مع محور x .

الجواب النهائي

لا يقطع الرسم البياني محور x ؛ القيمة المرشحة $x=0$ خارج المجال.

$$0 \notin D_f$$

البند ج (1)

جدوا إحداثيات النقطة القصوى وحددوا نوعها.

1 . اشتقاق البسط والمقام

مشتقة البسط ضرب المقام، ناقص مشتقة المقام ضرب البسط، على مربع المقام. نُميّز مشتقة البسط بالأزرق ومشتقة المقام بالبرتقالي.

$$u = x^2, \quad u' = 2x, \quad v = 4 \ln x - 6, \quad v' = \frac{4}{x}$$

$$f'(x) = \frac{2x(4 \ln x - 6) - \frac{4}{x}x^2}{(4 \ln x - 6)^2}$$

2 . فتح الأقواس وترتيب المشتقة

$$f'(x) = \frac{8x \ln x - 12x - 4x}{(4 \ln x - 6)^2}$$

$$f'(x) = \frac{8x \ln x - 16x}{(4 \ln x - 6)^2}$$

$$f'(x) = \frac{8x(\ln x - 2)}{(4 \ln x - 6)^2}$$

3 . حل معادلة المشتقة

في مجال التعريف x موجب، والمقام موجب لأنه مربع وغير صفري. لذلك تكون المشتقة صفراً فقط عندما $\ln x - 2 = 0$.

$$8x(\ln x - 2) = 0$$

$$\ln x = 2 \implies x = e^2$$

$$e^2 \in D_f$$

4 . تحديد النوع وحساب الإحداثي الثاني

إشارة المشتقة سالبة قبل e^2 وموجبة بعده، مع فصل المجال عند خط التقارب. لذا النقطة صغرى محلية؛ ليست صغرى مطلقة على المجال كله لأن الفرع الأيسر غير محدود من أسفل.

$$f(e^2) = \frac{(e^2)^2}{4 \ln(e^2) - 6}$$

$$f(e^2) = \frac{e^4}{8 - 6} = \frac{e^4}{2}$$

الجواب النهائي

نقطة صغرى محلية:

$$\left(e^2, \frac{e^4}{2}\right)$$

البند ج (2)

جدوا مجالات تصاعد وتنازل الدالة.

1 . جدول إشارة المشتقة ومجال التعريف

x	$(0, e^{3/2})$	$e^{3/2}$	$(e^{3/2}, e^2)$	e^2	(e^2, ∞)
قيمة التعويض	1	خارج المجال	$e^{7/4}$	—	e^3
$f'(x)$	—	غير معرفة	—	0	+
سلوك الدالة	↘	خط تقارب	↘	صغرى	↗

المجال هو $x > 0$ مع استبعاد $e^{3/2}$.

أسفل الجدول نفحص إشارة المشتقة بتعويض قيمة من كل فترة:

$$f'(1) = \frac{8(1)(0-2)}{(-6)^2} = -\frac{4}{9} < 0$$

$$f'(e^{7/4}) = \frac{8e^{7/4}(7/4-2)}{(7-6)^2} = -2e^{7/4} < 0$$

$$f'(e^3) = \frac{8e^3(3-2)}{(12-6)^2} = \frac{2e^3}{9} > 0$$

الجواب النهائي

التنازل:

$$(0, e^{3/2}), \quad (e^{3/2}, e^2)$$

التصاعد:

$$(e^2, \infty)$$

البند د (1)

حدّدوا الرسم الذي يصف f والرسم الذي يصف مشتقتها، وعلّوا التحديد.

1 . تحديد رسم الدالة الأصلية

البسط موجب في المجال كله. المقام سالب قبل خط التقارب وموجب بعده؛ لذلك الفرع الأيسر تحت محور x والفرع الأيمن فوقه. على الفرع الأيمن توجد نقطة صغرى، ولا توجد أصفار للدالة.

$$f(x) < 0 \quad (0 < x < e^{3/2}), \quad f(x) > 0 \quad (x > e^{3/2})$$

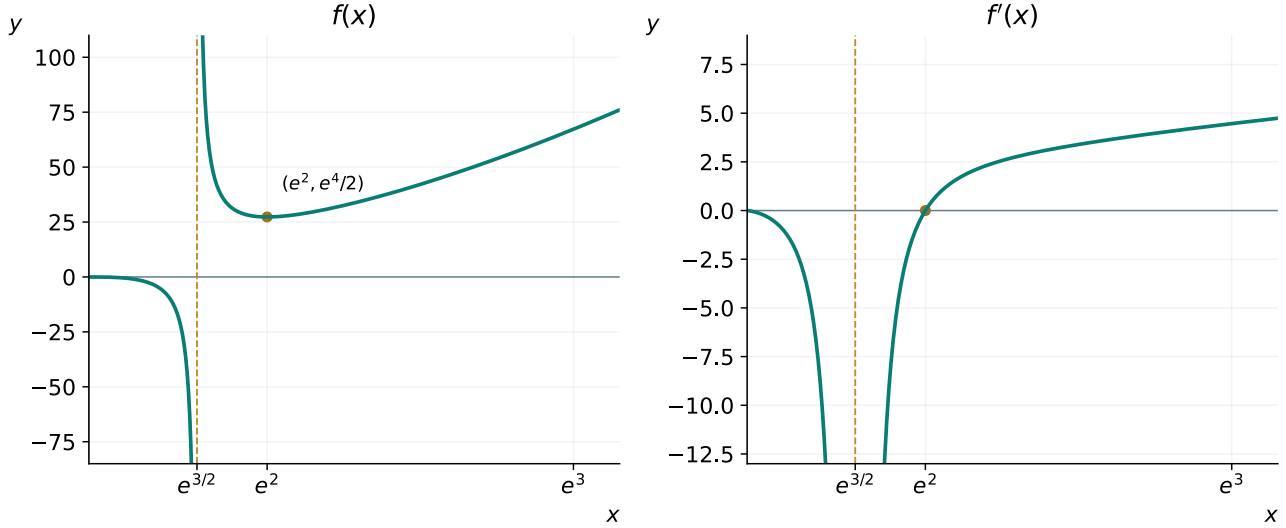
هذه الصفات تطابق الرسم III.

2. تحديد رسم المشتقة

المشتقة سالبة في فترتي التنازل وتساوي صفرًا عند e^2 ثم تصبح موجبة. ومن الطرفين عند خط التقارب تتجه إلى سالب ما لا نهاية، لأن البسط سالب قربه والمقام مربع يقترب من الصفر.

$$\lim_{x \rightarrow (e^{3/2})^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow (e^{3/2})^+} f'(x) = -\infty$$

هذه الصفات تطابق الرسم II.



الخط المتقطع عند $e^{3/2}$. الأرقام الرومانية تطابق الاختيارات في الورقة الأصلية.

الجواب النهائي

الرسم III للدالة، والرسم II للمشتقة.

$$f : \text{III}, \quad f' : \text{II}$$

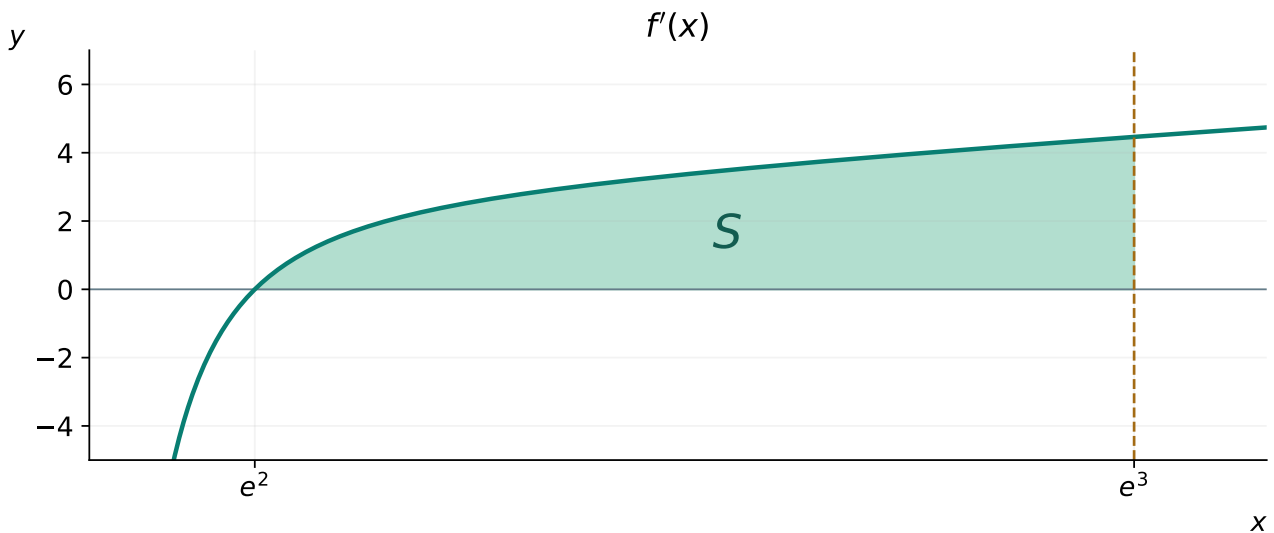
البند د (2)

احسبوا المساحة المحصورة بين رسم f' ومحور x والمستقيم $x=e^3$.

1. تحديد المنطقة وحدود التكامل

يقطع رسم المشتقة محور x عند e^2 . بين e^2 و e^3 يكون فوق المحور، ولذلك المساحة هي تكامل المشتقة دون تغيير الإشارة.

$$S = \int_{e^2}^{e^3} f'(x) dx$$



المساحة المظللة موجبة لأن المشتقة موجبة على فترة التكامل.

2. استعمال العلاقة بين الدالة ومشتقتها

$$S = [f(x)]_{e^2}^{e^3} = f(e^3) - f(e^2)$$

$$f(e^3) = \frac{(e^3)^2}{4 \ln(e^3) - 6} = \frac{e^6}{12 - 6} = \frac{e^6}{6}$$

$$f(e^2) = \frac{e^4}{2}$$

3. طرح القيم وترتيب الجواب

$$S = \frac{e^6}{6} - \frac{e^4}{2}$$

$$S = \frac{e^6 - 3e^4}{6}$$

$$S = \frac{e^4(e^2 - 3)}{6} > 0$$

الجواب النهائي

المساحة بوحدات مربعة:

$$S = \frac{e^6 - 3e^4}{6}$$