

حلول امتحان البجروت 472

صيف 2026 . الموعد أ . النسخة أ

حل أسئلة الامتحان كاملة بخطوات حسابية وتعليقات مفصلة

أجيبوا عن ثلاثة أسئلة، على الأقل عن سؤال واحد من كل فصل، وفق تعليمات هذه الدورة.

تتضمن هذه النسخة ورقة كل سؤال، ثم المعطيات والقوانين والتعويض وترتيب الحساب والجواب النهائي. جدول التغير أفقي، والتعويضات موضحة تحته.

يمكن استعمالها مستقلة عن البيئة التفاعلية.

حقوق النشر والطباعة | mathbagrut.com

© 2026 mathbagrut.com — حقوق الشرح والحلول والتصميم محفوظة. يُسمح بالتنزيل والطباعة للتعلم الشخصي أو الصفي مع إبقاء اسم الموقع. إعادة النشر أو البيع أو إزالة النسبة تحتاج إذنًا خطيًا. حقوق نصوص الأسئلة الأصلية ورسومها لأصحابها.

ورقة الأسئلة عربية رسمية من وزارة التربية والتعليم. الحلول والرسوم التوضيحية أصلية من إعداد mathbagrut.com، وليست حلولاً رسمية للوزارة.

السؤال 1 . إنتاج المثلجات وبيعها

الأسئلة

أجبوا عن ثلاثة من الأسئلة 1-5، عن سؤال واحد على الأقل من كل فصل . (لكل سؤال $33\frac{1}{3}$ درجة .)
انتبهوا : إذا أجبتم عن أكثر من ثلاثة أسئلة، تُفحص فقط الإجابات الثلاث الأولى التي في دفتركم .

الفصل الأول : المتواليات والهندسة في الفراغ والتزايد والتضاؤل

1. مع اقتراب عطلة الصيف، بدأوا في محلّ للبوظة بتحضير بوظة شوكلاتة .
في كل يوم، حضّروا في المحلّ 3 كغم من بوظة الشوكولاتة أكثر ممّا حضّروه في اليوم الذي قبله .
الكميّة الكليّة لبوظة الشوكولاتة التي حضّروها في المحلّ في اليوم الأوّل وفي اليوم الرابع كانت 149 كغم .
أ . جدوا كم كيلوغراماً من بوظة الشوكولاتة حضّروا في المحلّ في اليوم الأوّل .
عملية تحضير بوظة الشوكولاتة تستغرق 16 يوماً بالمجمّل .
ب . جدوا العدد الكليّ لكيلوغرامات بوظة الشوكولاتة التي حضّروها في المحلّ .
مع اقتراب عطلة الصيف، بدأوا في المحلّ بتحضير بوظة فانيليا أيضاً .
حضّروا في كل يوم في المحلّ d كغم من بوظة الفانيليا أكثر ممّا حضّروه في اليوم الذي قبله .
عملية تحضير بوظة الفانيليا تستغرق 16 يوماً بالمجمّل . في اليوم الأخير، حضّروا في المحلّ 115 كغم من بوظة الفانيليا .
الكميّة الكليّة لبوظة الفانيليا التي حضّروها في المحلّ كانت أقلّ بـ 480 كغم من الكميّة الكليّة لبوظة الشوكولاتة التي حضّروها في المحلّ .
جـ . جدوا قيمة d .
بعد أن انتهت عملية تحضير بوظة الشوكولاتة وبوظة الفانيليا، بدأوا ببيع نوعي البوظة .
استمرّ البيع 5 أيام، بيعت خلالها جميع البوظة التي حضّروها في المحلّ .
كميّة البوظة التي بيعت في كل يوم كانت ضعف الكميّة التي بيعت في اليوم الذي قبله .
د . جدوا كم كيلوغراماً من البوظة بيع في اليوم الأوّل .

البند أ

جدوا كمية مثلجات الشوكولاتة التي أُنتجت في اليوم الأوّل.

1 . تمثيل المعطى بمتوالية حسابية

نرمز إلى كمية الشوكولاتة في اليوم الأوّل بالرمز a_1 . الفرق اليومي 3 كغم.

$$a_n = a_1 + (n - 1)d, quadd = 3$$

$$a_4 = a_1 + 3 \cdot 3 = a_1 + 9$$

2 . استعمال مجموع اليومين

$$a_1 + a_4 = 149$$

$$a_1 + a_1 + 9 = 149$$

$$2a_1 = 140$$

$$a_1 = 70$$

الجواب النهائي

أُنتج في اليوم الأول 70 كغم من مثلجات الشوكولاتة.

البند ب

جدوا إجمالي كمية الشوكولاتة التي أُنتجت خلال 16 يوماً.

1 . حساب كمية اليوم الأخير

$$a_{16} = 70 + (16 - 1) \cdot 3$$

$$a_{16} = 70 + 45 = 115$$

2 . التعويض في قانون المجموع

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$S_{16} = \frac{16}{2}(70 + 115)$$

$$S_{16} = 8 \cdot 185 = 1480$$

الجواب النهائي

الكمية الإجمالية 1480 كغم.

البند جـ

جدوا الفرق اليومي في إنتاج مثلّجات الفانيل.

1 . إيجاد مجموع الفانيل وحدّه الأوّل

نرمز إلى كميات الفانيل بالرمز b_n .

$$S_{16}^{(b)} = 1480 - 480 = 1000$$

$$1000 = \frac{16}{2}(b_1 + 115)$$

$$125 = b_1 + 115$$

$$b_1 = 10$$

2 . إيجاد فرق المتوالية

$$b_{16} = b_1 + 15d$$

$$115 = 10 + 15d$$

$$105 = 15d$$

$$d = 7$$

الجواب النهائي

تزداد كمية الفانيل بمقدار 7 كغم كل يوم.

البند د

جدوا كمية المثلّجات التي بيعت في اليوم الأوّل.

1 . تحديد مجموع المبيعات

$$S_5 = 1480 + 1000 = 2480$$

$$q = 2$$

2 . استعمال قانون مجموع متوالية هندسية

$$S_n = c_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$2480 = c_1 \frac{2^5 - 1}{2 - 1}$$

$$2480 = 31c_1$$

$$c_1 = 80$$

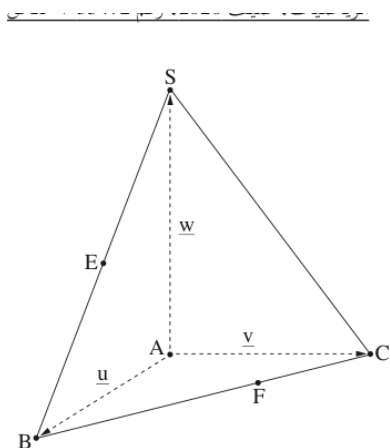
للتحقق نجمع مبيعات الأيام الخمسة.

$$80 + 160 + 320 + 640 + 1280 = 2480$$

الجواب النهائي

يبيع في اليوم الأول 80 كغم من المثلجات.

السؤال 2 . هرم قاعدته مثلث



2. في الرسم الذي أمامكم الهرم ABCS .

الضلع AS يعامد مستوى القاعدة ABC .

النقطة E هي منتصف الضلع BS .

النقطة F تقع على الضلع BC بحيث $\vec{BF} = \frac{2}{3}\vec{BC}$.

نرمز: $\vec{AB} = \underline{u}$ ، $\vec{AC} = \underline{v}$ ، $\vec{AS} = \underline{w}$.

أ. عبّروا بدلالة $\underline{u}$ و $\underline{v}$ و $\underline{w}$ عن المتجهات التالية:

$\vec{AF}$ ، $\vec{AE}$ ، $\vec{BS}$ ، $\vec{BC}$

معطى أن: $\angle BAC = 120^\circ$ ، $|\underline{u}| = |\underline{v}| = 6$ ، $|\underline{w}| = 8$.

ب. احسبوا حجم الهرم.

جـ. (1) جدوا قيمة $\underline{u} \cdot \underline{v}$.

(2) برهنوا أن $\vec{AE}$ يعامد $\vec{AF}$.

د. (1) جدوا قيمة $|\vec{AF}|$.

(2) احسبوا مساحة المثلث EAF .

(يتبع في صفحة 4)

البند أ

عبّروا عن BC و BS و AE و AF بدلالة u و v و w.

1 . المتجهان المنطلقان من B

$$\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC} = -\vec{u} + \vec{v}$$

$$\overrightarrow{BS} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AS} = -\vec{u} + \vec{w}$$

2. المتجه نحو منتصف BS

$$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BS} = \frac{1}{2}(\vec{w} - \vec{u})$$

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$$

$$\overrightarrow{AE} = \vec{u} + \frac{1}{2}\vec{w} - \frac{1}{2}\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{w}$$

3. المتجه نحو F

$$\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}(\vec{v} - \vec{u})$$

$$\overrightarrow{AF} = \vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v} - \frac{2}{3}\vec{u} = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v}$$

الجواب النهائي

$$\overrightarrow{BC} = \vec{v} - \vec{u}, \quad \overrightarrow{BS} = \vec{w} - \vec{u}$$

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{w}), \quad \overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v}$$

البند ب

احسبوا حجم الهرم ABCS.

1. مساحة القاعدة ABC

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \sin \angle BAC$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \sin 120^\circ$$

$$S_{ABC} = 18 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$$

2. حجم الهرم

بما أن AS عمود على مستوى القاعدة، فإن ارتفاع الهرم 8.

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot AS$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{3} \cdot 8 = 24\sqrt{3}$$

الجواب النهائي

$$V = 24\sqrt{3} \approx 41.57$$

وحدة مكعبة.

البند ج (1)

احسبوا الضرب العددي $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

1. التعويض في قانون الضرب العددي

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos 120^\circ$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 6 \cdot 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -18$$

الجواب النهائي

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -18$$

البند ج (2)

بينوا أن AE يعامد AF.

1. تحديد الضروب المنعدمة

$$\vec{w} \cdot \vec{u} = 0, \quad \vec{w} \cdot \vec{v} = 0$$

2 . فتح الضرب العددي

$$\begin{aligned}\vec{AE} \cdot \vec{AF} &= \left(\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{w} \right) \cdot \left(\frac{1}{3}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v} \right) \\ &= \frac{1}{6}|\vec{u}|^2 + \frac{1}{3}\vec{u} \cdot \vec{v} + \frac{1}{6}\vec{w} \cdot \vec{u} + \frac{1}{3}\vec{w} \cdot \vec{v} \\ &= \frac{1}{6} \cdot 36 + \frac{1}{3}(-18) + 0 + 0 \\ &= 6 - 6 = 0\end{aligned}$$

المتجهان غير صفرين وضربهما العددي صفر؛ إذن هما متعامدان.

الجواب النهائي

$$AE \perp AF$$

البند د (1)

احسبوا طول AF.

1 . تربيع طول المجموع

$$\begin{aligned}|AF|^2 &= \left| \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v} \right|^2 \\ |AF|^2 &= \frac{1}{9}|\vec{u}|^2 + \frac{4}{9}|\vec{v}|^2 + \frac{4}{9}\vec{u} \cdot \vec{v}\end{aligned}$$

2 . التعويض واستخراج الجذر الموجب

$$\begin{aligned}|AF|^2 &= \frac{36}{9} + \frac{4 \cdot 36}{9} + \frac{4}{9}(-18) \\ |AF|^2 &= 4 + 16 - 8 = 12 \\ |AF| &= \sqrt{12} = 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

الجواب النهائي

$$AF = 2\sqrt{3}$$

البند د (2)

احسبوا مساحة المثلث EAF.

1. حساب AE

$$|AE|^2 = \frac{1}{4}|\vec{u}|^2 + \frac{1}{4}|\vec{w}|^2 + \frac{1}{2}\vec{u} \cdot \vec{w}$$

$$|AE|^2 = \frac{36}{4} + \frac{64}{4} + 0 = 25$$

$$AE = 5$$

2. مساحة المثلث القائم

$$S_{EAF} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot AF$$

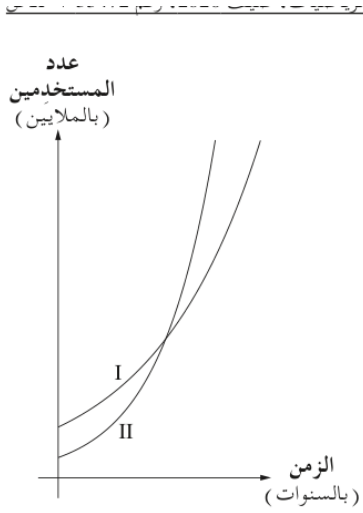
$$S_{EAF} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

الجواب النهائي

$$S_{EAF} = 5\sqrt{3}$$

وحدة مربعة.

السؤال 3 . عدد مستخدمي أداتين للذكاء الاصطناعي



3. في مطلع سنة 2025 ، فحص باحثون عدد الأشخاص

الذين يستخدمون أداتين للذكاء الاصطناعي ،

الأداة A والأداة B .

حسب توقُّع الباحثين ، عدد مستخدمي

الأداة A سيزداد بـ 10% في كل سنة .

معطى أنه في مطلع سنة 2025 ، عدد مستخدمي

الأداة A كان 50 مليوناً .

أ . جدوا كم يُتوقَّع أن يكون عدد مستخدمي

الأداة A في مطلع سنة 2030 .

حسب توقُّع الباحثين ، عدد مستخدمي الأداة B سيزداد بنسبة مئوية

ثابتة في كل سنة .

عدد مستخدمي الأداة B في مطلع سنة 2031 ، يُتوقَّع أن يكون

3 أضعاف عدد مستخدمي هذه الأداة في مطلع سنة 2025 .

ب . جدوا النسبة المئوية التي يُتوقَّع أن يزداد بها عدد مستخدمي الأداة B في كل سنة .

أمامكم الرسمان البيانيان II-I اللذان يصفان عدد الأشخاص الذين يُتوقَّع أن يستخدموا الأداة A و B منذ مطلع

سنة 2025 فصاعداً .

جـ . أي من الرسمين البيانيين II-I يصف عدد الأشخاص الذين يُتوقَّع أن يستخدموا الأداة B ؟

علِّلوا إجابتكم .

حسب توقُّع الباحثين ، في مطلع سنة 2030 سيكون عدد مستخدمي الأداة A أكبر بـ 30 مليوناً من عدد مستخدمي

الأداة B .

د . جدوا عدد مستخدمي الأداة B في مطلع سنة 2025 .

هـ . جدوا بعد مرور كم من الزمن منذ مطلع سنة 2025 ، يُتوقَّع أن يكون عدد مستخدمي الأداة A مساوياً لعدد

مستخدمي الأداة B .

البند أ

جدوا عدد مستخدمي A في مطلع 2030 .

1 . بناء نموذج النمو

نقيس العدد بالملايين والزمن بالسنوات منذ مطلع 2025 . الزيادة 10% تعني عامل نمو 1.10 .

$$A(t) = 50(1.10)^t$$

$$t = 2030 - 2025 = 5$$

2. التعويض

$$A(5) = 50(1.1)^5$$

$$A(5) = 50 \cdot 1.61051 = 80.5255$$

الجواب النهائي

نحو 80.53 مليون مستخدم.

البند ب

جدوا نسبة الزيادة السنوية في عدد مستخدمي B.

1. استعمال عامل النمو السنوي

$$B(t) = B_0 q_B^t$$

$$B(6) = 3B_0$$

$$B_0 q_B^6 = 3B_0$$

$$q_B^6 = 3$$

$$q_B = \sqrt[6]{3} \approx 1.200936955$$

2. تحويل العامل إلى نسبة مئوية

$$p_B = 100(q_B - 1)$$

$$p_B \approx 20.09369552\%$$

الجواب النهائي

نسبة الزيادة السنوية نحو 20.09%.

البند ج

أي الرسمين I أم II يصف عدد مستخدمي B؟ علّوا.

1 . مقارنة العاملين

$$q_B = 3^{1/6} \approx 1.20094 > 1.10 = q_A$$

في الرسم II يبدأ العدد أقل، ثم يتجاوز الرسم I. هذه هي صفة B: نسبة نموه أكبر، فيرتفع عدد مستخدميهِ أسرع نسبياً ويُدرك A. لو كانت نسبة نموه أصغر، لاستحال أن يبدأ أدنى ثم يتجاوزه.

الجواب النهائي

الرسم البياني II يصف عدد مستخدمي B.

البند د

جدوا عدد مستخدمي B في مطلع 2025.

1 . عدد B في مطلع 2030

$$B(5) = A(5) - 30 = 80.5255 - 30 = 50.5255$$

2 . الرجوع إلى عدد البداية

$$B_0 q_B^5 = 50.5255$$

$$B_0 = \frac{50.5255}{q_B^5} = \frac{50.5255}{3^{5/6}}$$

$$B_0 \approx 20.22598004$$

نحتفظ بالقيمة غير المدوّرة لحساب الزمن في البند التالي.

الجواب النهائي

نحو 20.23 مليون مستخدم.

البند هـ

بعد كم من الزمن منذ مطلع 2025 يتساوى عدد مستخدمي الأدواتين؟

1 . معادلة التساوي

$$50(1.1)^t = B_0 q_B^t$$

$$\frac{50}{B_0} = \left(\frac{q_B}{1.1} \right)^t$$

2 . حل المعادلة الأسية

$$\ln \left(\frac{50}{B_0} \right) = t \ln \left(\frac{q_B}{1.1} \right)$$

$$t = \frac{\ln(50/B_0)}{\ln(q_B/1.1)}$$

$$t \approx 10.30909928$$

الجواب النهائي

بعد نحو 10.31 سنة منذ مطلع 2025.

السؤال 4 . دالة أسية ومماس ومساحة

رسم بياني - - - - - رسم بياني - - - - -

الفصل الثاني: حساب التفاضل والتكامل للدوال الأسية واللوغريتمية

4. معطاة الدالة $f(x) = (a - 4x) \cdot e^{2x-1}$ ، المعرّفة لكل x .
a هو پارامتر .
معطى أن مميل المماس للرسم البياني للدالة $f(x)$ في النقطة التي فيها $x = 0$ هو $\frac{16}{e}$.
أ . جدوا قيمة a .
ب . عوّضوا $a = 10$ في الدالة $f(x)$ ، وأجيبوا عن البنود "ب - و" .
ب . (1) جدوا إحداثيات نقاط تقاطع الرسم البياني للدالة $f(x)$ مع المحورين .
(2) جدوا إحداثيات النقطة القصوى للدالة $f(x)$ ، وحددوا نوع هذه النقطة .
ج . ارسموا رسماً بيانياً تقريبياً للدالة $f(x)$.
د . معطاة الدالة $g(x) = 4 \cdot e^{2x-1}$ ، المعرّفة لكل x .
د . فسّروا لماذا الدالة $g(x)$ موجبة لكل x .
هـ . النقطة A هي نقطة تقاطع الرسم البياني للدالة $f(x)$ مع الرسم البياني للدالة $g(x)$.
هـ . جدوا إحداثيات النقطة A .
و . مرّروا عموداً على المحور x عبّر النقطة A .
و . احسبوا المساحة المحصورة بين الرسم البياني للدالة $g(x)$ والعمود والمحور x والمحور y .

(يتبع في صفحة 6)

البند أ

جدوا a إذا كان ميل المماس عند $x=0$ يساوي $e/16$.

1 . اشتقاق حاصل الضرب

$$f(x) = (a - 4x)e^{2x-1}$$

$$f'(x) = -4e^{2x-1} + (a - 4x) \cdot 2e^{2x-1}$$

$$f'(x) = e^{2x-1}(2a - 8x - 4)$$

2. استعمال ميل المماس

$$f'(0) = \frac{2a - 4}{e} = \frac{16}{e}$$

$$2a - 4 = 16$$

$$2a = 20$$

$$a = 10$$

الجواب النهائي

$$a = 10$$

البند ب (1)

جدوا نقاط تقاطع f مع المحورين، بعد التعويض a=10.

1. تقاطع محور x

$$f(x) = (10 - 4x)e^{2x-1}$$

$$f(x) = 0 \iff 10 - 4x = 0$$

$$4x = 10 \iff x = \frac{5}{2}$$

2. تقاطع محور y

$$f(0) = (10 - 0)e^{-1} = \frac{10}{e}$$

الجواب النهائي

$$\left(\frac{5}{2}, 0\right), \quad \left(0, \frac{10}{e}\right)$$

البند ب (2)

جدوا النقطة القصوى ونوعها.

1. جذور المشتقة

$$f'(x) = e^{2x-1}(20 - 8x - 4)$$

$$f'(x) = 8e^{2x-1}(2 - x)$$

$$f'(x) = 0 \iff x = 2$$

2. جدول الإشارة والتعويضات

x	$(-\infty, 2)$	2	$(2, \infty)$
قيمة فحص	0	2	3
f'(x)	+	0	-
f(x)	تزايد ↗	عظمى	تناقص ↘

الفترة مرتبة من اليسار إلى اليمين؛ نقاط عدم التعريف ليست نقاطاً قصوى.

$$f'(0) = 16/e > 0$$

$$f'(3) = -8e^5 < 0$$

$$f(2) = (10 - 8)e^3 = 2e^3$$

الجواب النهائي

$$(2, 2e^3)$$

نقطة عظمى.

البند ج

ارسموا رسماً بيانياً تقريبياً للدالة f.

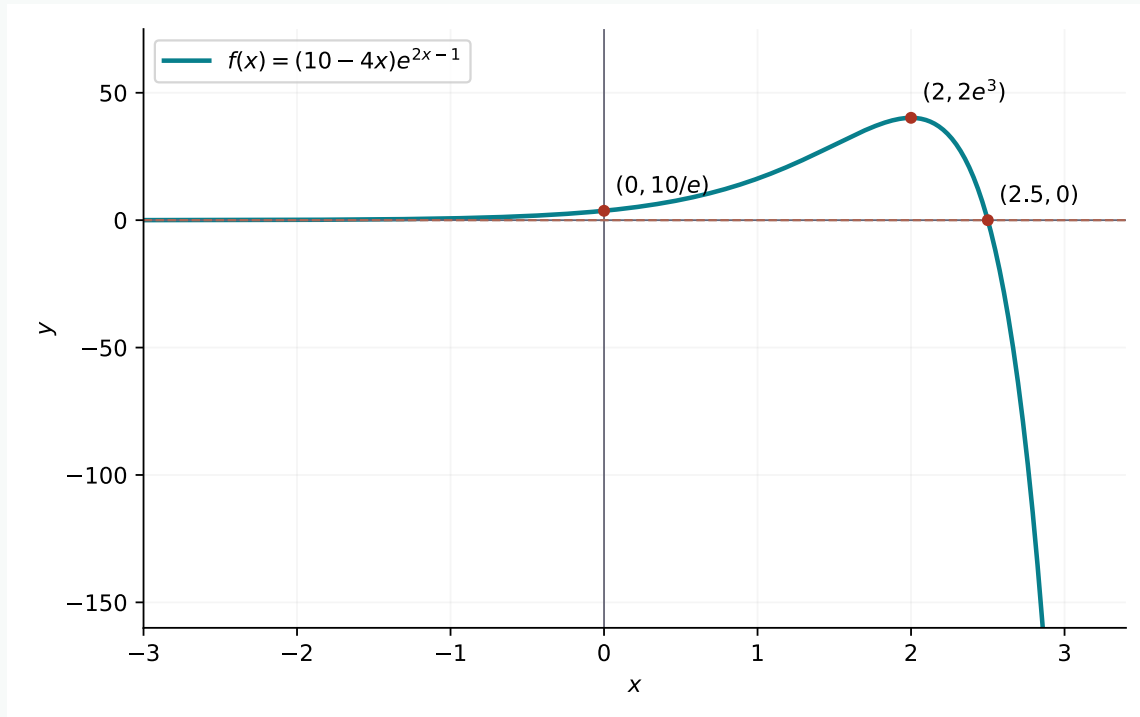
1. سلوك الأطراف

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (10 - 4x)e^{2x-1} = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (10 - 4x)e^{2x-1} = -\infty$$

المستقيم $y=0$ خط تقارب أفقي عند الطرف الأيسر. الرسم يرتفع إلى العظمى عند $x=2$ ثم ينخفض ويقطع محور x عند 2.5 .

2. الرسم



الجواب النهائي

الرسم موضح أعلاه، ومجال التعريف جميع الأعداد الحقيقية.

البند د

فسروا لماذا g موجبة لكل x .

1. إشارة العاملين

$$g(x) = 4e^{2x-1}$$

$$4 > 0, \quad e^{2x-1} > 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

حاصل ضرب عددين موجبين موجب.

الجواب النهائي

$$g(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

البند هـ

جدوا إحداثيات نقطة التقاطع A بين f و g.

1. حل معادلة التقاطع

$$(10 - 4x)e^{2x-1} = 4e^{2x-1}$$

$$10 - 4x = 4$$

$$4x = 6 \iff x = \frac{3}{2}$$

2. إيجاد الإحداثي الثاني

$$y = g(3/2) = 4e^{2 \cdot (3/2) - 1} = 4e^2$$

الجواب النهائي

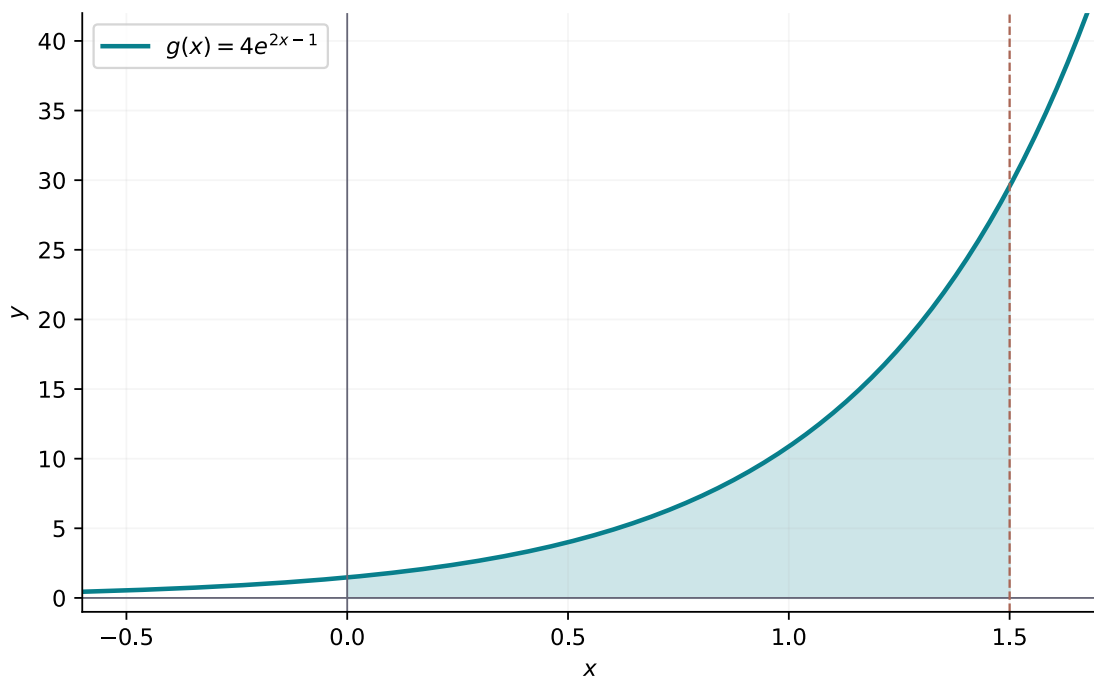
$$A \left(\frac{3}{2}, 4e^2 \right)$$

البند و

احسبوا المساحة بين g ومحوري الإحداثيات والعمود المارّ عبر A.

1. حدود المساحة

$$S = \int_0^{3/2} 4e^{2x-1} dx$$



التظليل يبين المساحة المطلوبة.

2. التكامل والتعويض بالحدود

$$\int 4e^{2x-1} dx = 2e^{2x-1} + C$$

$$S = [2e^{2x-1}]_0^{3/2}$$

$$S = 2e^2 - 2e^{-1} = 2e^2 - \frac{2}{e}$$

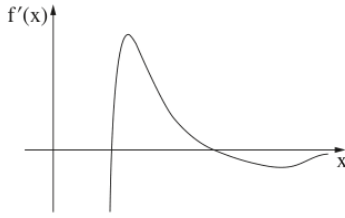
الجواب النهائي

$$S = 2e^2 - \frac{2}{e} \approx 14.0424$$

وحدة مربعة.

السؤال 5 . بحث دالة لوغريتمية وإزاحة أفقية

رسم بياني لدالة $f(x)$ ومشتقتها $f'(x)$ في المجال $x > 0$.



5. معطاة الدالة $f(x)$ ودالة مشتقتها $f'(x)$ المعرفتان في المجال $x > 0$.

الرسم الذي أمامكم يصف الرسم البياني لدالة المشتقة $f'(x)$.

جميع النقاط القصوى ونقاط التقاطع مع المحور x

لرسم البياني لدالة المشتقة $f'(x)$ تظهر في الرسم.

أ. أمامكم القولان I-II.

حددوا بالنسبة لكل قول هل هو صحيح أم غير صحيح. علّلوا تحديديكم.

I. للدالة $f(x)$ توجد بالضبط ثلاث نقاط قصوى.

II. الإحداثي x لنقطة النهاية الصغرى للدالة $f(x)$ هو أكبر من الإحداثي x لنقطة نهايتها العظمى.

$$\text{معطى أن } f(x) = \frac{14(\ln x)^2}{x^2}$$

ب. (1) جدوا إحداثيات نقاط تقاطع الرسم البياني للدالة $f(x)$ مع المحورين (إذا وجدت مثل هذه النقاط).

(2) جدوا إحداثيات النقاط القصوى للدالة $f(x)$ ، وحددوا نوع هذه النقاط.

(3) جدوا مجالات تصاعد وتنازل الدالة $f(x)$.

ج. ارسموا رسمًا بيانيًا تقريبياً للدالة $f(x)$.

$$\text{معطاة الدالة } g(x) = f(x - 4)$$

د. (1) ما هو مجال تعريف الدالة $g(x)$ ؟

(2) جدوا إحداثيات النقاط القصوى للدالة $g(x)$ ، وحددوا نوع هذه النقاط.

בהצלחה

נשמתי לכם النجاح

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל.

אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך.

חقوق الطبع محفوظة לדولة إسرائيل.

النسخة أو النشر ممنوعان إلا بآذن من: وزارة التربية والتعليم.

البند أ (I)

هل للدالة f ثلاث نقاط قصوى بالضبط؟ علّلوا من رسم f .

1 . قراءة إشارات المشتقة من الرسم

يقطع رسم f محور x مرتين: ينتقل في القطع الأول من السالب إلى الموجب، وفي الثاني من الموجب إلى السالب. إذن توجد لـ f نقطة صغرى ثم نقطة عظمى. نقاط f القصوى نفسها لا تضيف نقاطاً قصوى إلى f .

الجواب النهائي

القول I غير صحيح؛ للدالة f نقطتان قصويان بالضبط.

البند أ (II)

هل إحداثي x للصغرى أكبر من إحداثي x للعظمى؟

1 . ترتيب النقطتين

التقاطع الأيسر للمشتقة يعطي نقطة صغرى، والتقاطع الأيمن يعطي نقطة عظمى؛ لذلك إحداثي الصغرى أصغر.

الجواب النهائي

القول II غير صحيح؛ إحداثي الصغرى أصغر من إحداثي العظمى.

البند ب (1)

جدوا نقاط تقاطع f مع المحورين.

1 . تقاطع محور x

$$f(x) = \frac{14(\ln x)^2}{x^2}, \quad x > 0$$

$$f(x) = 0 \iff (\ln x)^2 = 0$$

$$\ln x = 0 \iff x = 1$$

2 . فحص محور y

عند محور y يكون $x=0$ ، وهذه القيمة خارج مجال التعريف.

الجواب النهائي

$(1, 0)$

لا يوجد تقاطع مع محور y.

البند ب (2)

جدوا النقاط القصوى ونوعها.

1 . اشتقاق وتبسيط

$$f'(x) = \frac{(28 \ln x / x)x^2 - 14(\ln x)^2 \cdot 2x}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{28x \ln x - 28x(\ln x)^2}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{28 \ln x(1 - \ln x)}{x^3}$$

2 . حل معادلة المشتقة

$$\ln x(1 - \ln x) = 0$$

$$\ln x = 0 \quad \text{or} \quad \ln x = 1$$

$$x = 1 \quad \text{or} \quad x = e$$

3 . جدول الإشارة والقيم

x	(0, 1)	1	(1, e)	e	(e, ∞)
قيمة f(x)	1/e	1	$\sqrt{e}$	e	e^2
f'(x)	—	0	+	0	—
f(x)	تناقص ↘	صغرى	تزايد ↗	عظمى	تناقص ↘

الفترة مرتبة من اليسار إلى اليمين؛ نقاط عدم التعريف ليست نقاطاً قصوى.

$$f'(1/e) = -56e^3 < 0$$

$$f'(\sqrt{e}) = 7e^{-3/2} > 0$$

$$f'(e^2) = -56e^{-6} < 0$$

$$f(1) = 0, \quad f(e) = \frac{14}{e^2}$$

الجواب النهائي

$$(1, 0), \quad (e, 14/e^2)$$

الأولى صغرى مطلقة، والثانية عظمى محلية.

البند (3)

جدوا مجالات التزايد والتناقص.

1 . ترجمة الإشارات إلى مجالات

تكون f متزايدة حيث f' موجبة، ومتناقصة حيث f' سالبة.

$$f'(x) > 0 \iff 1 < x < e$$

$$f'(x) < 0 \iff 0 < x < 1 \quad \text{or} \quad x > e$$

الجواب النهائي

تزايد في (e, 1) . تناقص في (0, 1) وفي (∞, e).

البند ج

ارسموا رسماً بيانياً تقريبياً للدالة f .

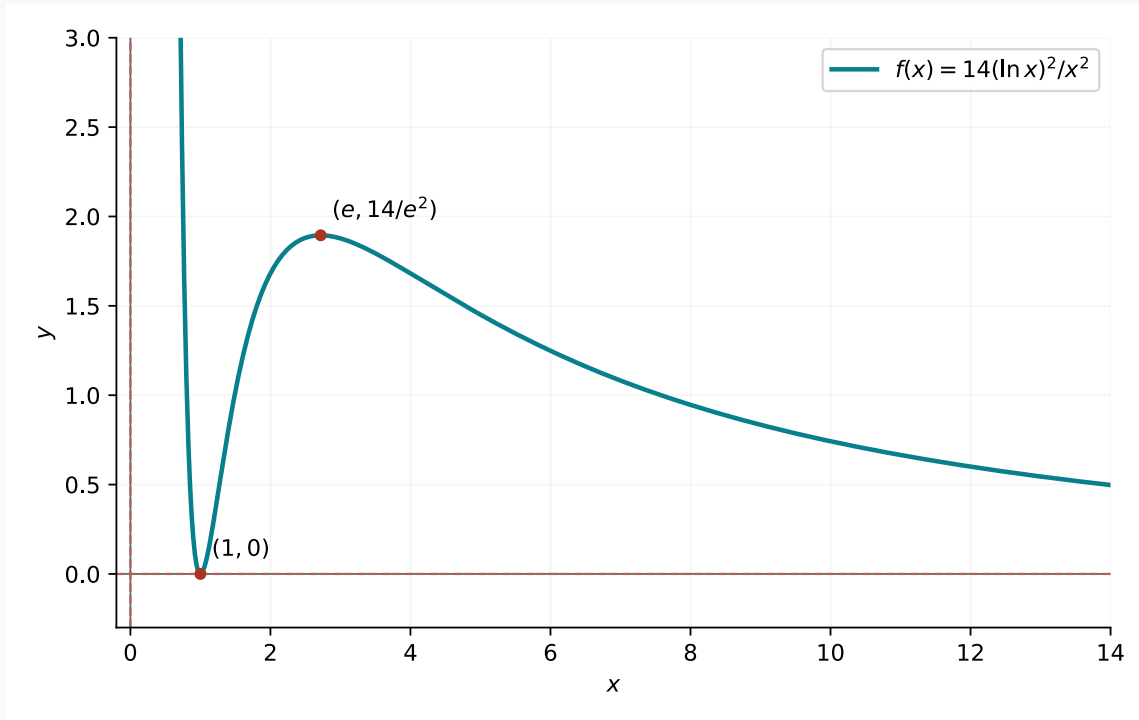
1 . النهايات

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{14(\ln x)^2}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{14(\ln x)^2}{x^2} = 0^+$$

$x=0$ خط تقارب عمودي، و $y=0$ خط تقارب أفقي عند اللانهاية.

2 . الرسم



الفرع عند $x=0$ يرتفع بلا حد؛ قَطْع عرضه للملاءمة المقياس.

الجواب النهائي

الرسم موضح أعلاه، ولا توجد قيم سالبة للدالة.

البند د (1)

جدوا مجال تعريف $g(x)=f(x-4)$.

1 . شرط المجال

$$x - 4 > 0$$

$$x > 4$$

الجواب النهائي

$$D_g = (4, \infty)$$

البند د (2)

جدوا النقاط القصوى للدالة g ونوعها.

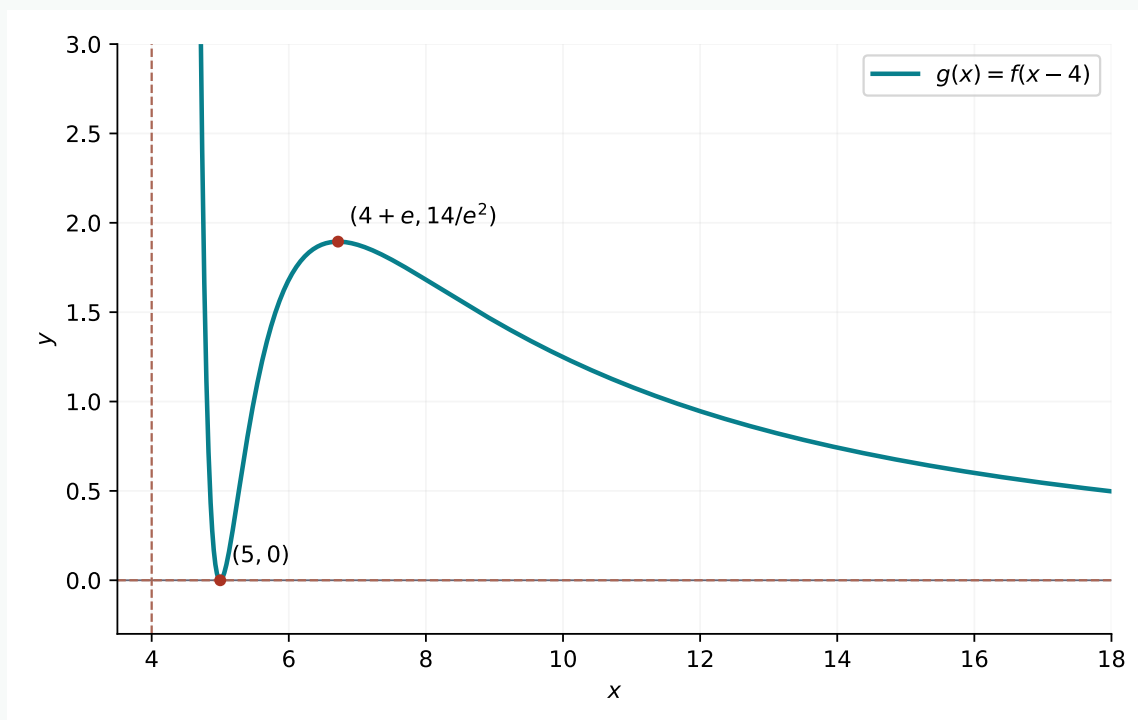
1 . إزاحة إحداثيات النقاط القصوى

نضيف 4 إلى إحداثي x لكل نقطة على f ، ويبقى إحداثي y ونوع النقطة كما هما.

$$(1, 0) \mapsto (5, 0)$$

$$(e, 14/e^2) \mapsto (e + 4, 14/e^2)$$

2 . الرسم بعد الإزاحة



الجواب النهائي

$$(5, 0), \quad (e + 4, 14/e^2)$$

الأولى صغرى مطلقة، والثانية عظمى محلية.