

حلول امتحان البجروت 472

صيف 2025 . الموعد أ

حل أسئلة الامتحان كاملة بخطوات حسابية وتعليقات مفصلة

أجيبوا عن ثلاثة أسئلة، على الأقلّ عن سؤال واحد من كل فصل، وفق تعليمات هذه الدورة.

تتضمن هذه النسخة ورقة كل سؤال، ثم المعطيات والقوانين والتعويض وترتيب الحساب والجواب النهائي. جدول التغير أفقي، والتعويضات موضحة تحته.

يمكن استعمالها مستقلة عن البيئة التفاعلية.

حقوق النشر والطباعة | mathbagrut.com

© 2026 mathbagrut.com — حقوق الشرح والحلول والتصميم محفوظة. يُسمح بالتنزيل والطباعة للتعلم الشخصي أو الصفي مع إبقاء اسم الموقع. إعادة النشر أو البيع أو إزالة النسبة تحتاج إذنًا خطيًا. حقوق نصوص الأسئلة الأصلية ورسومها لأصحابها.

ورقة الأسئلة عربية رسمية من وزارة التربية والتعليم. الحلول والرسوم التوضيحية أصلية من إعداد mathbagrut.com، وليست حلولاً رسمية للوزارة.

السؤال 1 . متوالية حسابية ومتوالية هندسية لانتهائية

حل المسألة باستخدام المنطق الرياضي والمنطق الحسابي.

1. معطاة متوالية حسابية A ، فيها 57 حدًا : $a_1, a_2, a_3, \dots$.

معطى أن : $a_2 + a_4 = a_6$.

الحد الأخير في المتوالية A هو 171 .

أ . جدوا فرق المتوالية و a_1 .

معطاة متوالية هندسية لانتهائية B ، حدودها هي : $b_1, b_2, b_3, \dots$.

معطى أن : $b_1 = a_6$, $3 \cdot b_3 = a_8$.

ب . جدوا أساس المتوالية B (جدوا الإمكانيتين) .

معطى أن المتوالية B ليست تصاعديّة وليست تنازليّة .

ج . جدوا مجموع الحدود التي تقع في الأماكن الزوجية في المتوالية B .

البند أ

جدوا فرق المتوالية A وحدّها الأول.

1 . استعمال العلاقة بين الحدود

$$a_2 + a_4 = a_6$$

$$(a_1 + d) + (a_1 + 3d) = a_1 + 5d$$

$$2a_1 + 4d = a_1 + 5d$$

$$a_1 = d$$

2 . استعمال الحد الأخير

$$a_{57} = a_1 + 56d = 171$$

$$d + 56d = 171$$

$$57d = 171 \implies d = 3$$

$$a_1 = 3$$

الجواب النهائي

$$d = 3, \quad a_1 = 3$$

البند ب

جدوا الإمكانيتين لأساس المتوالية B.

1 . حساب حدود A المعطاة

$$a_6 = 3 + 5 \cdot 3 = 18$$

$$a_8 = 3 + 7 \cdot 3 = 24$$

$$b_1 = 18, \quad 3b_3 = 24 \implies b_3 = 8$$

2 . معادلة الأساس

$$b_3 = b_1 q^2$$

$$8 = 18q^2 \implies q^2 = \frac{4}{9}$$

$$q = \frac{2}{3} \quad \text{or} \quad q = -\frac{2}{3}$$

الجواب النهائي

$$q = \pm \frac{2}{3}$$

البند ج

جدوا مجموع حدود B التي تقع في الأماكن الزوجية.

1 . اختيار الأساس

الأساس الموجب $2/3$ مع حدّ أول موجب يعطي متوالية تنازلية. لذلك، وفق المعطى، نأخذ $q = -2/3$.

$$q = -\frac{2}{3}$$

2 . متوالية الحدود الزوجية

$$b_2 = 18 \left(-\frac{2}{3} \right) = -12$$

$$q_{\text{even}} = q^2 = \frac{4}{9}, \quad \left| \frac{4}{9} \right| < 1$$

3 . مجموع المتوالية الهندسية المتقاربة

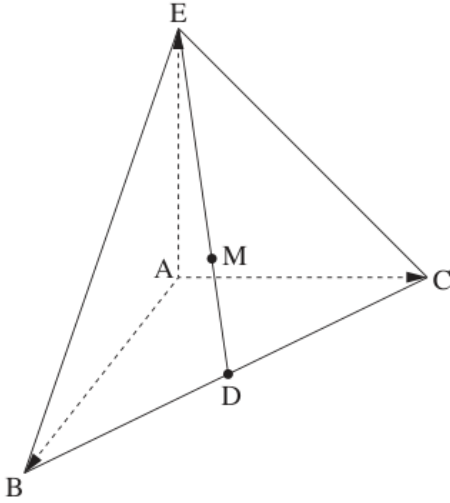
$$S_{\text{even}} = \frac{b_2}{1 - q^2}$$

$$S_{\text{even}} = \frac{-12}{1 - 4/9} = \frac{-12}{5/9} = -\frac{108}{5} = -21.6$$

الجواب النهائي

$$S_{\text{even}} = -21.6$$

السؤال 2 . ارتفاع على وجه هرم ثلاثي



2. في الرسم الذي أمامكم الهرم ABCE .

النقطة D هي منتصف الضلع BC .

النقطة M تقع على ED بحيث $\vec{EM} = \frac{2}{3}\vec{ED}$.

الضلع AE هو ارتفاع في الهرم .

معطى أن: $\angle BAC = 90^\circ$.

نرمز: $\vec{AB} = \underline{u}$ ، $\vec{AC} = \underline{v}$ ، $\vec{AE} = \underline{w}$.

أ. عبّروا بدلالة $\underline{u}$ و $\underline{v}$ و $\underline{w}$ عن المتجهات $\vec{BC}$ و $\vec{ED}$ و $\vec{AM}$.

معطى أن: $|\underline{w}| = |\underline{v}| = |\underline{u}| = 12$.

ب. (1) برهنوا أن $\vec{AM}$ يعامد $\vec{ED}$.

(2) برهنوا أن $\vec{AM}$ يعامد المستوى BEC .

معطى أن: $A(0, 0, 0)$.

الرأس B يقع على الجزء الموجب للمحور x ، والرأس C يقع على الجزء الموجب للمحور y ،

والرأس E يقع على الجزء الموجب للمحور z .

ج. (1) ما هي إحداثيات النقاط B و C و E ؟

(2) جدوا إحداثيات النقطتين D و M .

د. احسبوا مساحة المثلث AMD .

البند أ

عبّروا عن BC و ED و AM بدلالة $\underline{u}$ و $\underline{v}$ و $\underline{w}$.

1 . المتجهان BC و ED

$$\vec{BC} = \vec{v} - \vec{u}$$

$$\vec{AD} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v})$$

$$\vec{ED} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} - \vec{w}$$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EM}$$

$$\overrightarrow{AM} = \vec{w} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \vec{u} + \frac{1}{2} \vec{v} - \vec{w} \right)$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3} \vec{u} + \frac{1}{3} \vec{v} + \frac{1}{3} \vec{w}$$

الجواب النهائي

$$\overrightarrow{BC} = \vec{v} - \vec{u}, \quad \overrightarrow{ED} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) - \vec{w}$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})$$

البند ب (1)

برهنوا أن AM يعامد ED.

1 . التعامد والأطوال

من $\angle BAC = 90^\circ$ ومن كون AE ارتفاعاً، تكون جميع الضروب المختلطة صفراً.

$$|\vec{u}|^2 = |\vec{v}|^2 = |\vec{w}|^2 = 144$$

2 . حساب الضرب العددي

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{ED} = \frac{1}{6} |\vec{u}|^2 + \frac{1}{6} |\vec{v}|^2 - \frac{1}{3} |\vec{w}|^2$$

$$= 24 + 24 - 48 = 0$$

الجواب النهائي

$$AM \perp ED$$

البند ب (2)

برهنوا أن AM يعامد المستوى BEC.

1 . التعامد مع BC

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} &= \frac{1}{3}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{v} - \vec{u}) \\ &= -\frac{1}{3}|\vec{u}|^2 + \frac{1}{3}|\vec{v}|^2 = 0\end{aligned}$$

2 . استعمال معيار التعامد مع مستوى

المستقيمان BC وED موجودان في المستوى BEC ويتقاطعان عند D. ثبت أن AM يعامد كليهما؛ لذلك يعامد المستوى.

الجواب النهائي

$$AM \perp (BEC)$$

البند ج (1)

جدوا إحداثيات B وC وE.

1 . تعيين الإحداثيات

A هو الأصل. الرأس B على محور x، وC على محور y، وE على محور z، وكلّ منها يبعد 12 عن A.

$$B(12, 0, 0), \quad C(0, 12, 0), \quad E(0, 0, 12)$$

الجواب النهائي

$$B(12, 0, 0), \quad C(0, 12, 0), \quad E(0, 0, 12)$$

البند ج (2)

جدوا إحداثيات D وM.

1 . منتصف BC

$$D = \left(\frac{12+0}{2}, \frac{0+12}{2}, 0 \right) = (6, 6, 0)$$

2 . إحداثيات M

$$\overrightarrow{ED} = (6, 6, -12)$$

$$M = E + \frac{2}{3}\overrightarrow{ED}$$

$$M = (0, 0, 12) + (4, 4, -8) = (4, 4, 4)$$

الجواب النهائي

$$D(6, 6, 0), \quad M(4, 4, 4)$$

البند د

احسبوا مساحة المثلث AMD.

1 . طول الضلعين القائمين

$$AM = \sqrt{4^2 + 4^2 + 4^2} = 4\sqrt{3}$$

$$MD = \sqrt{(6-4)^2 + (6-4)^2 + (0-4)^2}$$

$$MD = \sqrt{4 + 4 + 16} = 2\sqrt{6}$$

2 . المساحة

$$S = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{6} = 4\sqrt{18} = 12\sqrt{2}$$

الجواب النهائي

$$S = 12\sqrt{2}$$

وحدة مربعة.

السؤال 3 . الشتل والبيع في مشتلين

3. في مشتلين - المشتل "أ" والمشتل "ب" - بدأوا بشتل نباتات في نفس اليوم.
- في هذا اليوم، شتلوا في المشتل "أ" 600 نبتة، وشتلوا في المشتل "ب" a نباتات.
- عدد النباتات في المشتل "أ" يتزايد بـ 5% في كل أسبوع، وعدد النباتات في المشتل "ب" يتزايد بـ 10% في كل أسبوع.
- بعد مرور وقت معين منذ بداية الشتل، كان عدد النباتات في المشتل "أ" مساوياً لعدد النباتات في المشتل "ب".
- أ. أمامكم ادعاءان، II-I . حددوا أي ادعاء صحيح . عللوا تحديدكم.
- I. $a < 600$
- II. $a > 600$
- ب. بعد مرور 17 أسبوعاً منذ بداية الشتل، كان عدد النباتات في المشتل "ب" ضعف عدد النباتات في المشتل "أ".
- جدوا قيمة a .
- بعد مرور 17 أسبوعاً منذ بداية الشتل، أوقفوا الشتل في كلا المشتلين وبدأوا ببيع النباتات.
- منذ اليوم الذي بدأوا فيه بالبيع، تضاعف عدد النباتات في المشتل "ب" في كل أسبوع بنسبة مئوية ثابتة.
- بعد مرور 5 أسابيع منذ اليوم الذي بدأوا فيه بالبيع، كان عدد النباتات في المشتل "ب" 53% من عدد النباتات في بداية البيع.
- ج. جدوا النسبة المئوية التي يتضاعف بها عدد النباتات في المشتل "ب" في كل أسبوع.
- منذ اليوم الذي بدأوا فيه بالبيع، تضاعف عدد النباتات في المشتل "أ" في كل أسبوع بـ 8%.
- د. جدوا بعد مرور كم من الوقت منذ اليوم الذي بدأوا فيه بالبيع، كان عدد النباتات في المشتل "أ" مساوياً لعدد النباتات في المشتل "ب".

/ يتبع في صفحة 4 /

البند أ

أي الادعاءين $a < 600$ أم $a > 600$ صحيح؟ عللوا.

1 . المقارنة

لو بدأ ب بعدد مساوٍ لـ 600 أو أكبر منه، فسيبقى أكبر لأن نسبة نموه أعلى. وجود تساوي بعد وقت موجب يقتضي أن يبدأ ب بعدد أقل.

$$600(1.05)^t = a(1.10)^t$$

$$a = 600 \left(\frac{1.05}{1.10} \right)^t < 600 \quad (t > 0)$$

الجواب النهائي

الادعاء I صحيح: $a < 600$.

البند ب

جدوا a إذا كان عدد ب بعد 17 أسبوعاً ضعف عدد أ.

1 . معادلة العددين

$$a(1.10)^{17} = 2 \cdot 600(1.05)^{17}$$

$$a = 1200 \left(\frac{1.05}{1.10} \right)^{17}$$

$$a \approx 544.15632624$$

الجواب النهائي

نحو 544.16 نبته وفق النموذج.

البند ج

جدوا نسبة التضائل الأسبوعية في ب بعد بدء البيع.

1 . إيجاد العامل

$$B_0 q^5 = 0.53 B_0$$

$$q^5 = 0.53 \implies q = \sqrt[5]{0.53}$$

$$q \approx 0.8807551148$$

2 . إيجاد النسبة

$$p = 100(1 - q)$$

$$p \approx 11.92448852\%$$

الجواب النهائي

نحو 11.92% في الأسبوع.

البند د

بعد كم من الوقت منذ بدء البيع يتساوى عدد النباتات؟

1 . نقطة بدء زمن جديدة

ليكن A_0 عدد نباتات أ عند بدء البيع؛ إذن $B_0 = 2A_0$. نقيس t بالأسابيع منذ بدء البيع.

$$A(t) = A_0(0.92)^t, \quad B(t) = 2A_0q^t$$

2 . حل التساوي

$$A_0(0.92)^t = 2A_0q^t$$

$$\left(\frac{0.92}{q}\right)^t = 2$$

$$t = \frac{\ln 2}{\ln(0.92/q)}$$

$$t \approx 15.90004258$$

الجواب النهائي

بعد نحو 15.90 أسبوعاً منذ بدء البيع.

السؤال 4 . كسر أسّي وتحويل رأسي

الفصل الثاني : حساب التفاضل والتكامل للدوال الأسّيّة واللوغريتميّة

4. معطاة الدالة $f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2 - 4x + a}$ ، a هو پارامتر .

يوجد للدالة $f(x)$ خطّ تقارب عموديّ معادلته $x = 2$.
أ. جدوا قيمة a .

عوضوا $a = 4$ في الدالة $f(x)$ ، وأجيبوا عن البنود "ب-د" .

ب. (1) جدوا مجال تعريف الدالة $f(x)$.

(2) جدوا إحداثيّات نقاط تقاطع الرسم البيانيّ للدالة $f(x)$ مع المحورين (إذا وُجدت مثل هذه النقاط) .

(3) جدوا إحداثيّات النقطة القصوى للدالة $f(x)$ ، وحدّدوا نوع هذه النقطة .

ج. ارسموا رسمًا بيانيًا تقريبيًا للدالة $f(x)$.

معطاة الدالة $h(x) = -f(x) + e^8$ التي مجال تعريفها مطابق لمجال تعريف الدالة $f(x)$.

د. كم نقطة تقاطع توجد للرسم البيانيّ للدالة $h(x)$ مع المحور x ؟ علّلوا إجابتكم .

5. الدالة $f(x)$ ودالة مشتقتها $f'(x)$ معرفتان في المجال $x > 0$.

البند أ

جدوا a إذا كان $x=2$ خط تقارب عموديًا.

1 . التعويض في المقام

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2 - 4x + a}$$

$$2^2 - 4 \cdot 2 + a = 0$$

$$4 - 8 + a = 0 \implies a = 4$$

2 . فحص البسط

$$e^{2 \cdot 2} = e^4 \neq 0$$

الجواب النهائي

$$a = 4$$

البند ب (1)

جدوا مجال f بعد التعويض a=4.

1. شرط المقام

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$$

$$(x - 2)^2 \neq 0 \iff x \neq 2$$

الجواب النهائي

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

البند ب (2)

جدوا التقاطعات مع المحورين.

1. محور x

$$e^{2x} > 0$$

لذلك لا يوجد تقاطع مع محور x.

2. محور y

$$f(0) = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4}$$

الجواب النهائي

$$(0, 1/4)$$

لا يوجد تقاطع مع محور x.

البند ب (3)

جدوا النقطة القصوى ونوعها.

1 . قاعدة مشتقة الكسر

مشتقة البسط ضرب المقام، سالب مشتقة المقام ضرب البسط، تقسيم مربع المقام.

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}(x-2)^2 - e^{2x} \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4}$$

2 . استخراج عوامل وتبسيط

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}(x-2)[(x-2)-1]}{(x-2)^4}$$

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}(x-3)}{(x-2)^3}$$

$$f'(x) = 0 \iff x = 3$$

3 . الإشارة والتعويض

x	$(-\infty, 2)$	2	$(2, 3)$	3	$(3, \infty)$
قيمة فحص	0	—	5/2	3	4
f(x)	+	×	—	0	+
f(x)	تزايد ↗	غير معرفة	تناقص ↘	صغرى	تزايد ↗

الفترة مرتبة من اليسار إلى اليمين؛ نقاط عدم التعريف ليست نقاطاً قصوى.

$$f'(0) = 3/4 > 0, \quad f'(5/2) = -8e^5 < 0, \quad f'(4) = e^8/4 > 0$$

$$f(3) = e^6$$

الجواب النهائي

$$(3, e^6)$$

نقطة صغرى محلية.

البند ج

ارسموا رسماً تقريبياً للدالة f.

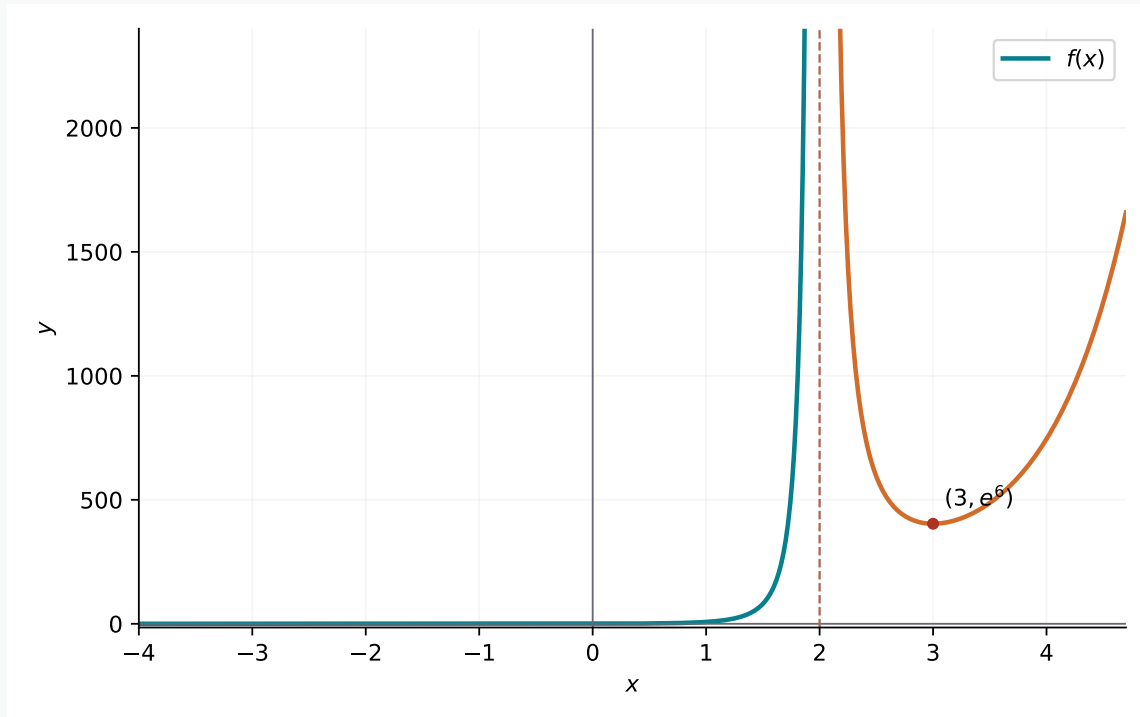
1 . سلوك الأطراف

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$$

2 . الرسم



الخط الأفقي المساعد هو $y=e^8$ ؛ المقياس يبرز بند التقاطعات التالي.

الجواب النهائي

الرسم موضح أعلاه.

البند د

كم تقاطعاً للرسم $h(x) = -f(x) + e^8$ مع محور x ؟

1 . معادلة التقاطع

$$-f(x) + e^8 = 0 \iff f(x) = e^8$$

2 . عدّ الحلول

الفرع الأيسر متزايد من صفر إلى ما لا نهاية؛ لذلك يعطي حلاً واحداً. الفرع الأيمن ينخفض من ما لا نهاية إلى e^6 ثم يرتفع بلا حد. لأن $e^8 > e^6$ فإنه يعطي حلين. المجموع ثلاثة.

الجواب النهائي

ثلاث نقاط تقاطع مع محور x .

السؤال 5 . بحث $3x(\ln x)^2$ والمساحة تحت مشتقتها

معطى أن نقطة النهاية الصغرى تقع عن يمين نقطة النهاية العظمى .

أ . أحد الرسوم البيانية I-IV التي في آخر السؤال يصف دالة المشتقة $f'(x)$. حددوا أيًا منها، وعلّلوا تحديدكم .

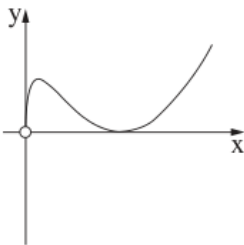
معطى أن: $f(x) = 3x \cdot (\ln x)^2$.

ب . (1) جدوا إحداثيات نقاط تقاطع الرسم البياني للدالة $f(x)$ مع المحورين (إذا وجدت مثل هذه النقاط) .

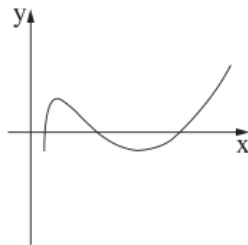
(2) جدوا إحداثيات النقاط القصوى للدالة $f(x)$ ، وحددوا نوع هذه النقاط .

جـ . حددوا أيًا من الرسوم البيانية I-IV التي في آخر السؤال يصف الدالة $f(x)$.

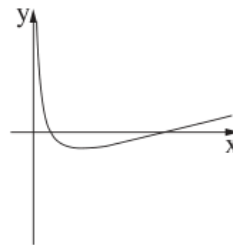
د . جدوا المساحة المحصورة بين الرسم البياني لدالة المشتقة $f'(x)$ والمحور x .



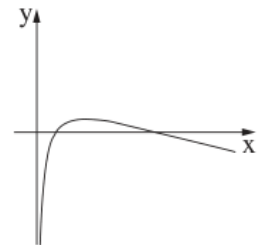
IV



III



II



I

בהצלחה!

נتمنى لكم النجاح!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל.

איזו להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך.

البند أ

أي الرسوم I-IV يصف المشتقة؟ علّوا.

1 . مطابقة الإشارات

الرسم II يبدأ موجباً، ثم يقطع محور x إلى السالب، ثم يعود إلى الموجب. بذلك يعطي عظمى لـ f ثم صغرى إلى يمينها. الرسوم الأخرى لا تحقق هذا الترتيب.

الجواب النهائي

الرسم II يصف f' .

البند ب (1)

جدوا التقاطعات مع المحورين.

1 . حل معادلة التقاطع

$$f(x) = 3x(\ln x)^2, \quad x > 0$$

$$f(x) = 0 \iff \ln x = 0 \iff x = 1$$

2 . محور y

x=0 خارج المجال؛ لا يوجد تقاطع مع محور y.

الجواب النهائي

$$(1, 0)$$

لا يوجد تقاطع مع محور y.

البند ب (2)

جدوا النقاط القصوى ونوعها.

1 . الاشتقاق

$$f'(x) = 3(\ln x)^2 + 3x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 3(\ln x)^2 + 6 \ln x = 3 \ln x (\ln x + 2)$$

$$f'(x) = 0 \iff x = e^{-2} \quad \text{or} \quad x = 1$$

2. الإشارات والتعويضات

x	$(0, e^{-2})$	e^{-2}	$(e^{-2}, 1)$	1	$(1, \infty)$
قيمة فحص	e^{-3}	e^{-2}	e^{-1}	1	e
f(x)	+	0	-	0	+
f(x)	تزايد ↗	عظمى	تناقص ↘	صغرى	تزايد ↗

الفترة مرتبة من اليسار إلى اليمين؛ نقاط عدم التعريف ليست نقاطاً قصوى.

$$f'(e^{-3}) = 9 > 0, \quad f'(e^{-1}) = -3 < 0, \quad f'(e) = 9 > 0$$

$$f(e^{-2}) = 3e^{-2} \cdot 4 = 12e^{-2}, \quad f(1) = 0$$

الجواب النهائي

$$(e^{-2}, 12e^{-2})$$

نقطة عظمى محلية.

$$(1, 0)$$

نقطة صغرى مطلقة.

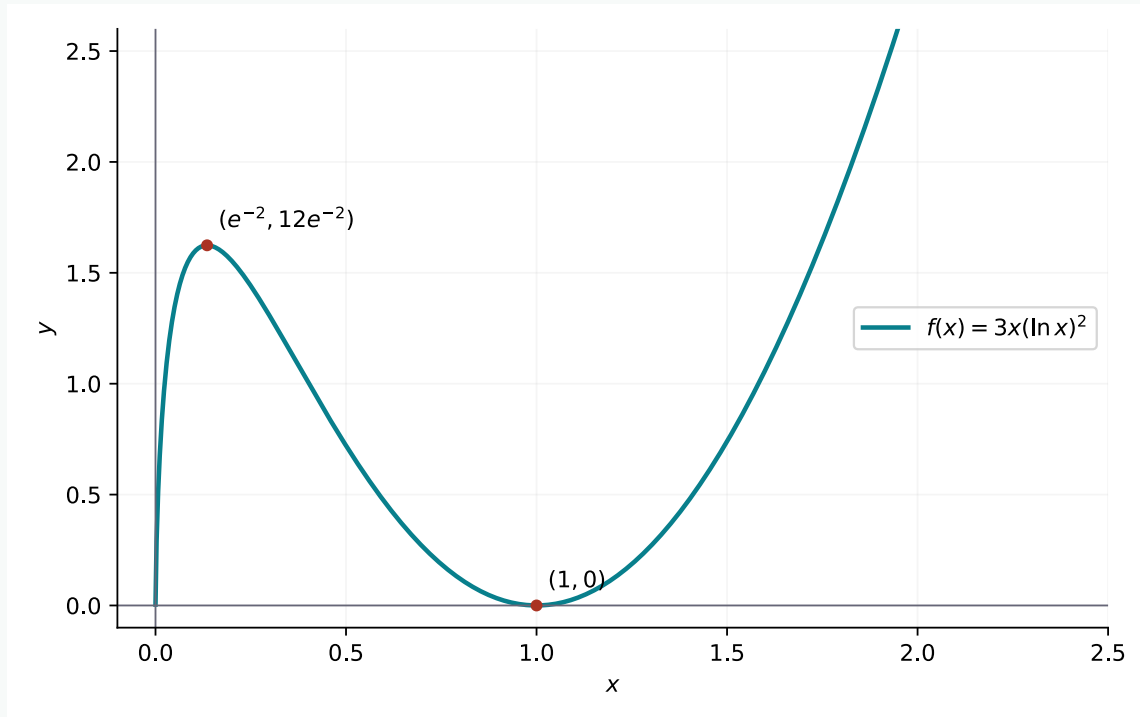
البند جـ

أي الرسوم I-IV يصف f؟ علّوا.

1 . مطابقة شكل الدالة

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 3x(\ln x)^2 = 0$$

الرسم له حدّ مفتوح عند الأصل، وعظمى محلية موجبة، ثم صغرى على محور x ، وبعدها يصعد. إذن الرسم IV.



الجواب النهائي

الرسم IV يصف f .

البند د

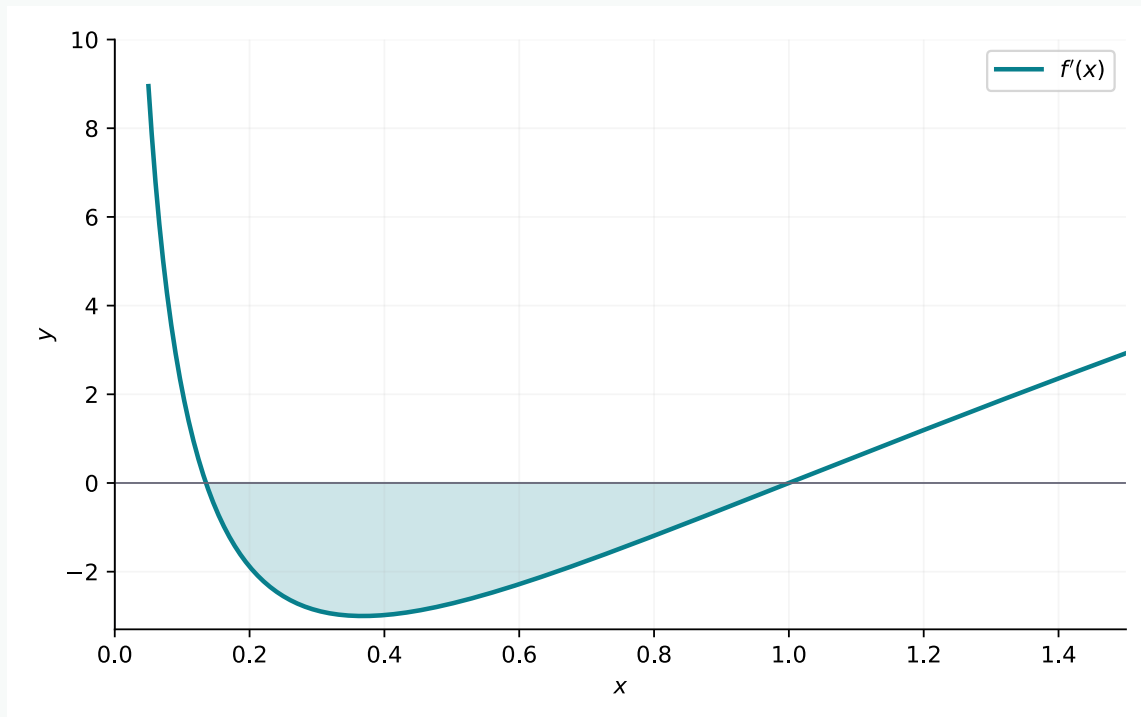
جدوا المساحة المحصورة بين المشتقة ومحور x .

1 . كتابة المساحة

$$S = - \int_{e^{-2}}^1 f'(x) dx$$

$$S = -[f(1) - f(e^{-2})]$$

$$S = -(0 - 12e^{-2}) = 12e^{-2}$$



الجواب النهائي

$$S = 12/e^2 \approx 1.6240$$

وحدة مربعة.