

حلول امتحان البجروت 472

شتاء 2024 · ترجمة تعليمية عربية

حل أسئلة الامتحان كاملة بخطوات حسابية وتعليقات مفصلة

أجيبوا عن ثلاثة من الأسئلة الخمسة حسب اختياركم، وفق تعليمات هذه الدورة.

تتضمن هذه النسخة ورقة كل سؤال، ثم المعطيات والقوانين والتعويض وترتيب الحساب والجواب النهائي. جدول التغير أفقي، والتعويضات موضحة تحته.

يمكن استعمالها مستقلة عن البيئة التفاعلية.

حقوق النشر والطباعة | mathbagrut.com

© 2026 mathbagrut.com — حقوق الشرح والحلول والتصميم محفوظة. يُسمح بالتنزيل والطباعة للتعلم الشخصي أو الصفي مع إبقاء اسم الموقع. إعادة النشر أو البيع أو إزالة النسبة تحتاج إذنًا خطيًا. حقوق نصوص الأسئلة الأصلية ورسومها لأصحابها.

ورقة الأسئلة ترجمة تعليمية عربية مرفقة؛ راجعوا الورقة الرسمية عند الحاجة. الحلول والرسوم التوضيحية أصلية من إعداد mathbagrut.com، وليست حلولاً رسمية للوزارة.

السؤال 1 . إنتاج الحواسيب وبيعها

الأسئلة

أجيبوا عن ثلاثة من الأسئلة 1-5 (لكل سؤال $33\frac{1}{3}$ درجة). إذا أجبت عن أكثر من ثلاثة أسئلة، تُفحص الإجابات الثلاثة الأولى فقط.

1. الفصل الأول - متتاليات، متجهات، تزايد وتناقص

بدأ مصنع إلكترونيات إنتاج حواسيب. في كل أسبوع كان عدد الحواسيب التي أُنتجت أكبر بمقدار ثابت من عددها في الأسبوع السابق.
في الأسبوع الأول أُنتج 900 حاسوب. استمر الإنتاج 50 أسبوعاً؛ وأُنتج خلال هذه المدة 167,500 حاسوب بالمجموع.

أ. بكم كان عدد الحواسيب التي أُنتجت في كل أسبوع أكبر من عددها في الأسبوع السابق؟
بعد انتهاء الإنتاج، باع المصنع الحواسيب خلال عدة أشهر. كان عدد الحواسيب المباعة في كل شهر أكبر q مرة من عددها في الشهر السابق.

في الشهر الرابع بيع 160 حاسوباً، وفي الشهر السابع بيع 1,280 حاسوباً.

ب. كم حاسوباً بيع في الشهر الأول؟

الشهر السابع كان الشهر الأوسط من أشهر البيع.

ج. كم شهراً استمر البيع؟

د. كم حاسوباً من الحواسيب التي أُنتجت في المصنع لم يُباع؟

البند أ

بكم زاد الإنتاج في كل أسبوع؟

1 . التعويض في قانون المجموع

$$S_{50} = \frac{50}{2} [2 \cdot 900 + 49d] = 167500$$

$$25(1800 + 49d) = 167500$$

$$1800 + 49d = 6700$$

$$49d = 4900 \implies d = 100$$

الجواب النهائي

بمقدار 100 حاسوب كل أسبوع.

البند ب

كم حاسوباً بيع في الشهر الأول؟

1 . عامل النمو

$$\frac{b_7}{b_4} = \frac{1280}{160} = q^3$$

$$q^3 = 8 \implies q = 2$$

2 . الحد الأول

$$b_4 = b_1 q^3$$

$$160 = 8b_1 \implies b_1 = 20$$

الجواب النهائي

20 حاسوباً.

البند ج

كم شهراً استمر البيع إذا كان السابع هو الأوسط؟

1 . تحديد عدد الأشهر

$$\frac{n+1}{2} = 7$$

$$n+1 = 14 \implies n = 13$$

الجواب النهائي
13 شهراً.

البند د

كم حاسوباً لم يُبَع؟

1 . مجموع المبيعات

$$S_{13} = 20 \frac{2^{13} - 1}{2 - 1}$$

$$S_{13} = 20(8192 - 1) = 163820$$

2 . الباقي

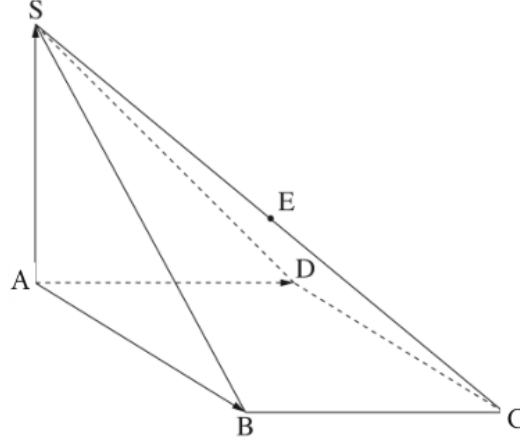
$$167500 - 163820 = 3680$$

الجواب النهائي
لم يُبَع 3680 حاسوباً.

السؤال 2 . هرم قاعدته معين

2. يصف الرسم هرمًا رباعياً SABCD قاعدته ABCD معين. النقطة E هي منتصف الحرف SC.

القطعة AS عمودية على قاعدة الهرم.
نرمز: $\vec{AB} = \vec{u}$, $\vec{AD} = \vec{v}$, $\vec{AS} = \vec{w}$.



أ. عبّروا عن المتجهين $\vec{EB}$ و $\vec{ED}$ بدلالة $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

معطى: $|\vec{u}| = |\vec{w}|$, $\angle BAD = 60^\circ$.

ب. أثبتوا أن $\vec{EB} \perp \vec{ED}$.

معطى: الرأس D على الجزء الموجب من محور y، والإحداثي z للرأس S موجب.

ج. (1) جدوا طول الحرف AB وإحداثيات الرأس S.

(2) احسبوا حجم الهرم SABCD.

البند أ

عبّروا عن $\vec{EB}$ و $\vec{ED}$ بدلالة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$.

1 . متجه موضع E

$$\vec{AC} = \vec{u} + \vec{v}$$

$$\vec{AE} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})$$

2 . المتجهان المطلوبان

$$\overrightarrow{EB} = \vec{u} - \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{w}$$

$$\overrightarrow{ED} = \vec{v} - \overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{w}$$

الجواب النهائي

$$\overrightarrow{EB} = \frac{1}{2}(\vec{u} - \vec{v} - \vec{w})$$

$$\overrightarrow{ED} = \frac{1}{2}(-\vec{u} + \vec{v} - \vec{w})$$

البند ب

أثبتوا أن EB يعامد ED.

1 . الأطوال والضروب العددية

$$|\vec{u}| = |\vec{v}| = |\vec{w}| = s$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = s^2 \cos 60^\circ = s^2/2$$

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$$

2 . الضرب العددي

$$\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{ED} = \frac{1}{4}[-|\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}]$$

$$= \frac{1}{4}[-s^2 - s^2 + s^2 + s^2] = 0$$

الجواب النهائي

$$EB \perp ED$$

البند ج (1)

جدوا طول AB وإحداثيات S.

1 . طول AB

$$AB = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2 + 0^2}$$

$$AB = \sqrt{12 + 4} = 4$$

2 . تعيين S

AS عمود على القاعدة التي تقع في مستوى xy، وإحداثي z للرأس S موجب؛ لذلك S على محور z الموجب.

$$AS = 4 \implies S(0, 0, 4)$$

الجواب النهائي

$$AB = 4, \quad S(0, 0, 4)$$

البند ج (2)

احسبوا حجم الهرم.

1 . القاعدة والارتفاع

$$S_{ABCD} = 4 \cdot 4 \sin 60^\circ = 8\sqrt{3}$$

$$h = AS = 4$$

2 . الحجم

$$V = \frac{1}{3} \cdot 8\sqrt{3} \cdot 4 = \frac{32\sqrt{3}}{3}$$

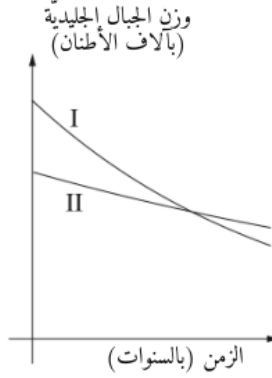
الجواب النهائي

$$V = 32\sqrt{3}/3$$

وحدة مكعبة.

السؤال 3 . ذوبان جبلين جليديين ونمو الفقمات

3. في بحر الشمال جبلان جليديّان، A و B. يذوبان على مرّ السنوات ويفقدان من وزنهما. قاست باحثة وزن كلّ منهما في كلّ صيف مدّة 10 سنوات. يصف الرسم وزن كلّ جبل جليديّ، بآلاف الأطنان، حسب السنوات.



أ. أيّ رسم من الرسمين I-II يلائم الجبل الجليديّ الذي يذوب أسرع؟ علّوا تحديدكم.

الدالة $f(t) = 7 \cdot (0.96)^t$ تصف وزن الجبل الجليديّ A في كلّ سنة.

الدالة $g(t) = 10 \cdot (0.91)^t$ تصف وزن الجبل الجليديّ B في كلّ سنة.

ب. لكلّ دالة، حدّدوا الرسم البيانيّ الذي يصفها. علّوا تحديدكم.

ج. وزن أيّ جبل جليديّ كان أكبر بعد 7 سنوات من بداية القياسات؟

د. جدّوا بعد كم سنة من بداية القياسات تساوى وزن الجبل الجليديّ A ووزن الجبل الجليديّ B.

فحصت الباحثة أيضاً عدد الفقمات في هذه المنطقة. وجدت أنّ العدد يزداد كلّ سنة بنسبة مئوية ثابتة. بعد 10 سنوات أصبح عددها أكبر 1.5 مرّة من عددها عند بداية القياسات.

هـ. جدّوا بكم بالمئة يزداد عدد الفقمات في كلّ سنة.

البند أ

أي رسم يلائم الجبل الأسرع ذوباناً؟

1 . قراءة الرسم

الرسم I يبدأ أعلى ثم يصبح أدنى من II؛ لذلك عامل بقائه أصغر ونسبة ذوبانه أكبر.

الجواب النهائي

الرسم I يلائم الجبل الأسرع ذوباناً.

البند ب

حدّدوا الرسم الملائم لكل نموذج.

1 . البدايات والنسب

$$A(t) = 7(0.96)^t, \quad B(t) = 10(0.91)^t$$

B يبدأ أثقل ويفقد 9% سنوياً، فيناسب I. أما A فيبدأ أخف ويفقد 4%، فيناسب II.

الجواب النهائي

A: الرسم B: II. الرسم I.

البند ج

أي الجبلين أثقل بعد سبع سنوات؟

1 . المقارنة العددية

$$A(7) = 7(0.96)^7$$

$$A(7) \approx 5.26013235$$

$$B(7) = 10(0.91)^7$$

$$B(7) \approx 5.16761019$$

2 . الاستنتاج

قيمة A أكبر من قيمة B. الأعداد هنا بآلاف الأطنان.

الجواب النهائي

الجبل الجليدي A أثقل بعد سبع سنوات.

البند د

بعد كم سنة تساوى الوزنان؟

1 . معادلة التساوي

$$7(0.96)^t = 10(0.91)^t$$

$$\left(\frac{0.96}{0.91}\right)^t = \frac{10}{7}$$

$$t = \frac{\ln(10/7)}{\ln(0.96/0.91)}$$

$$t \approx 6.66823169$$

الجواب النهائي

بعد نحو 6.67 سنة.

البند هـ

جدوا نسبة الزيادة السنوية في عدد الفقمات.

1 . العامل والنسبة

$$N_0 q^{10} = 1.5 N_0$$

$$q = 1.5^{1/10}$$

$$p = 100(q - 1)$$

$$p \approx 4.13797440\%$$

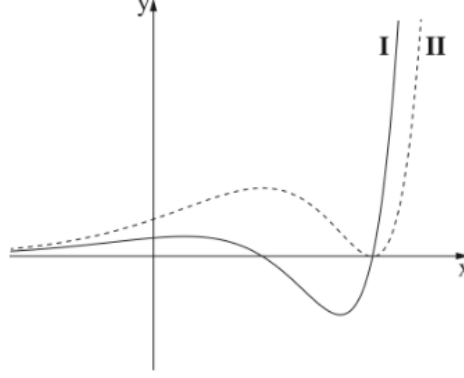
الجواب النهائي

نحو 4.14% سنوياً.

السؤال 4 . دالة ومشتقتها وانعكاس المشتقة

4. الفصل الثاني - التفاضل والتكامل لدوال أسية ولوغاريتمية

يعرض الرسم منحنيين I و II. أحدهما هو الرسم البياني للدالة $f(x)$ ، والآخر هو الرسم البياني لدالة المشتقة $f'(x)$.



أ. أيّ رسم من الرسمين I-II يصف دالة المشتقة $f'(x)$ ؟ علّوا إجابتكم.

معطى: $f(x) = (x - 4)^2 \cdot e^x - 3$.

ب. (1) جدوا مجال تعريف الدالة $f(x)$.

(2) جدوا إحداثيات نقاط تقاطع الرسم البياني للدالة $f(x)$ مع المحاور.

(3) جدوا إحداثيات نقاط تطرف الدالة $f(x)$ ، وحدّدوا نوعها حسب الرسم.

ج. احسبوا المساحة المحصورة بين الرسم البياني لدالة المشتقة $f'(x)$ ومحور x .

معطى الدالة $g(x) = -f'(x)$.

د. احسبوا المساحة المحصورة بين الرسم البياني للدالة $g(x)$ والرسم البياني لدالة المشتقة $f'(x)$. علّوا إجابتكم.

البند أ

أي الرسمين I و II يصف f' ؟ علّوا.

1 . مطابقة الرسمين

الرسم I هو المنحنى الذي يصبح سالباً بين صفريه. هذان الصفران يقابلان العظمى والصغرى في الرسم II؛ لذلك I يصف f' ، و II يصف f .

الجواب النهائي

الرسم I يصف f' .

البند ب (1)

جدوا مجال $f(x) = (x-4)^2 e^{(x-3)}$.

1 . المجال

$$D_f = \mathbb{R}$$

الجواب النهائي

$$D_f = \mathbb{R}$$

البند ب (2)

جدوا التقاطعات مع المحورين.

1 . محور x

$$(x - 4)^2 e^{x-3} = 0 \iff x = 4$$

2 · محور y

$$f(0) = 16e^{-3} = 16/e^3$$

الجواب النهائي

$$(4, 0), \quad (0, 16/e^3)$$

البند ب (3)

جدوا النقاط القصوى ونوعها.

1 · اشتقاق وتحليل

$$f'(x) = 2(x-4)e^{x-3} + (x-4)^2e^{x-3}$$

$$f'(x) = e^{x-3}(x-4)[2 + x - 4]$$

$$f'(x) = e^{x-3}(x-4)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \iff x = 2 \quad \text{or} \quad x = 4$$

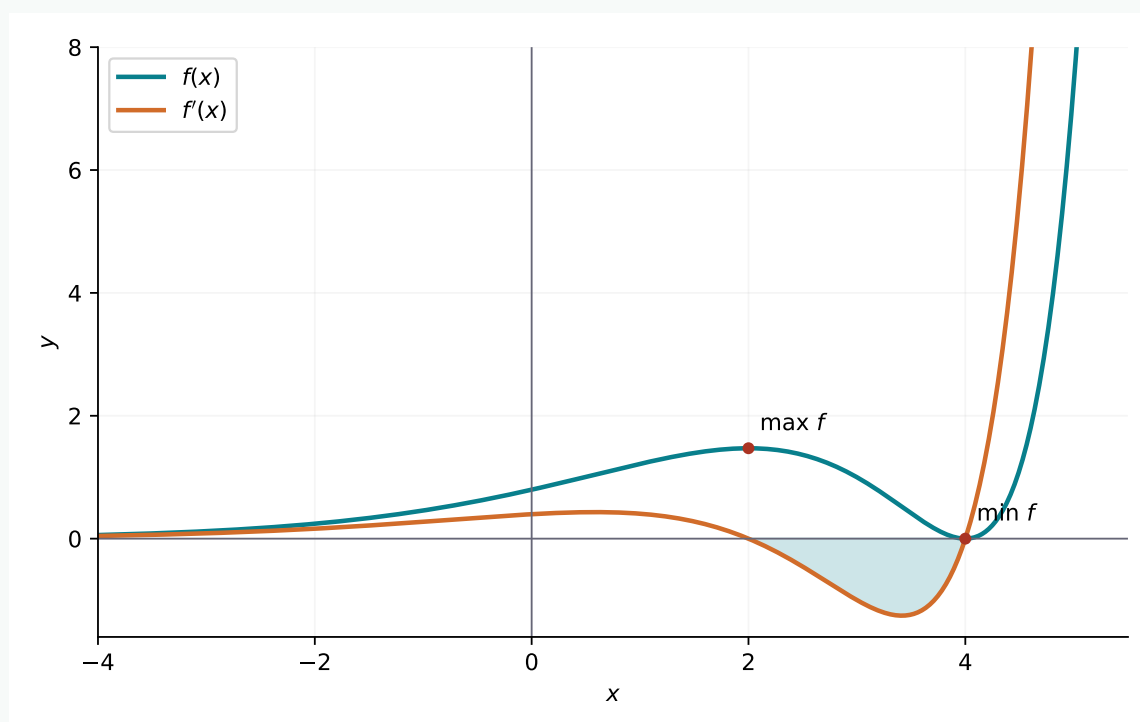
2. الإشارة والقيم

x	$(-\infty, 2)$	2	$(2, 4)$	4	$(4, \infty)$
قيمة فحص	0	2	3	4	5
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	تزايد ↗	عظمى	تناقص ↘	صغرى	تزايد ↗

الفترة مرتبة من اليسار إلى اليمين؛ نقاط عدم التعريف ليست نقاطاً قصوى.

$$f'(0) = 8e^{-3} > 0, \quad f'(3) = -1 < 0, \quad f'(5) = 3e^2 > 0$$

$$f(2) = 4/e, \quad f(4) = 0$$



الجواب النهائي

$$(2, 4/e)$$

نقطة عظمى محلية.

$$(4, 0)$$

نقطة صغرى مطلقة.

البند ج

احسبوا المساحة بين المشتقة ومحور x .

1. التكامل مع تصحيح الإشارة

$$S = - \int_2^4 f'(x) dx$$

$$S = -[f(4) - f(2)]$$

$$S = -(0 - 4/e) = 4/e$$

الجواب النهائي

$$S = 4/e$$

وحدة مربعة.

البند د

احسبوا المساحة بين $g = -f$ ورسم f .

1. فرق المنحنيين

$$S_2 = \int_2^4 [-f'(x) - f'(x)] dx$$

$$S_2 = -2 \int_2^4 f'(x) dx = 2S$$

$$S_2 = 8/e$$

الجواب النهائي

$$S_2 = 8/e$$

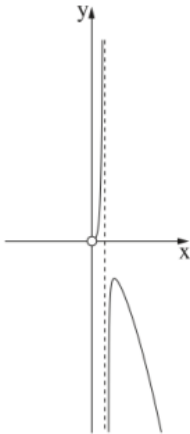
وحدة مربعة.

السؤال 5 . كسر لوغريثمي ومماس أفقي

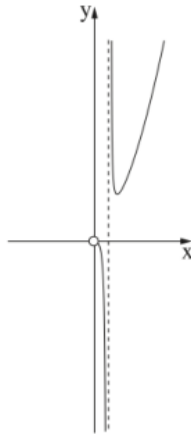
5. معطى الدالة $f(x) = \frac{3x^2}{2 \ln(x) + 1}$

- أ. (1) جدوا مجال تعريف الدالة $f(x)$.
 (2) هل يقطع الرسم البياني للدالة $f(x)$ محور x ؟ علّوا إجابتكم.
 (3) جدوا معادلة خط التقارب العمودي على محور x للدالة $f(x)$.

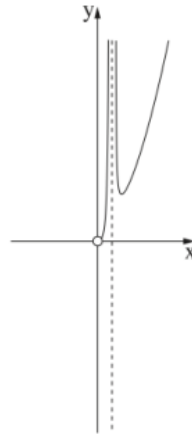
- ب. جدوا إحداثيات نقطة تطرف الدالة $f(x)$ ، وحددوا نوعها.
 ج. جدوا مجالات تصاعد الدالة $f(x)$ وتنقصها.
 د. حددوا أي رسم من الرسوم I-IV في نهاية السؤال هو الرسم البياني للدالة $f(x)$.
 المستقيم $y = t$ يمّس الرسم البياني للدالة $f(x)$.
 هـ. هل يقطع المستقيم $y = t - 5$ الرسم البياني للدالة $f(x)$ ؟ إذا نعم، جدوا عدد نقاط التقاطع. إذا لا، علّوا.



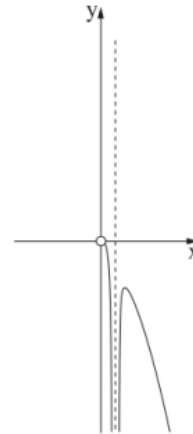
IV



III



II



I

البند أ (1)

جدوا مجال التعريف.

1 . شرط التعريف

$$x > 0, \quad 2 \ln x + 1 \neq 0$$

$$\ln x \neq -1/2 \iff x \neq e^{-1/2}$$

الجواب النهائي

$$D_f = (0, e^{-1/2}) \cup (e^{-1/2}, \infty)$$

البند أ (2)

هل يقطع الرسم محور x ؟ علّوا.

1 . فحص البسط

$$3x^2 > 0 \quad (x > 0)$$

قيمة الصفر الوحيدة للبسط هي $x=0$ ، وهي خارج مجال التعريف.

الجواب النهائي

لا يوجد تقاطع مع محور x .

البند أ (3)

جدوا خط التقارب العمودي.

1 . الفحص

$$x = e^{-1/2} : \quad 3x^2 = 3/e > 0$$

الجواب النهائي

$$x = e^{-1/2}$$

البند ب

جدوا النقطة القصوى ونوعها.

1 . مشتقة الكسر

مشتقة البسط ضرب المقام، سالب مشتقة المقام ضرب البسط، تقسيم مربع المقام.

$$f'(x) = \frac{6x(2 \ln x + 1) - 3x^2 \cdot 2/x}{(2 \ln x + 1)^2}$$

2 . فتح الأقواس والتبسيط

$$f'(x) = \frac{12x \ln x + 6x - 6x}{(2 \ln x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{12x \ln x}{(2 \ln x + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \iff x = 1$$

3 . الجدول والتعويض

x	$(0, e^{-1/2})$	$e^{-1/2}$	$(e^{-1/2}, 1)$	1	$(1, \infty)$
قيمة فحص	e^{-1}	—	$e^{-1/4}$	1	e
f'(x)	—	×	—	0	+
f(x)	تناقص ↘	غير معرفة	تناقص ↘	صغرى	تزايد ↗

الفترة مرتبة من اليسار إلى اليمين؛ نقاط عدم التعريف ليست نقاطاً قصوى.

$$f'(e^{-1}) = -12/e < 0, \quad f'(e^{-1/4}) = -12e^{-1/4} < 0$$

$$f'(e) = 4e/3 > 0, \quad f(1) = 3$$

الجواب النهائي

$$(1, 3)$$

نقطة صغرى محلية.

البند جـ

جدوا مجالات التصاد والتناقص.

1 . استخلاص المجالات

المشتقة سالبة في جزأي المجال قبل 1، وموجبة بعد 1.

الجواب النهائي

تناقص في $(e^{-1/2}, 0)$ وفي $(e^{-1/2}, 1)$ تصاعد في $(\infty, 1)$.

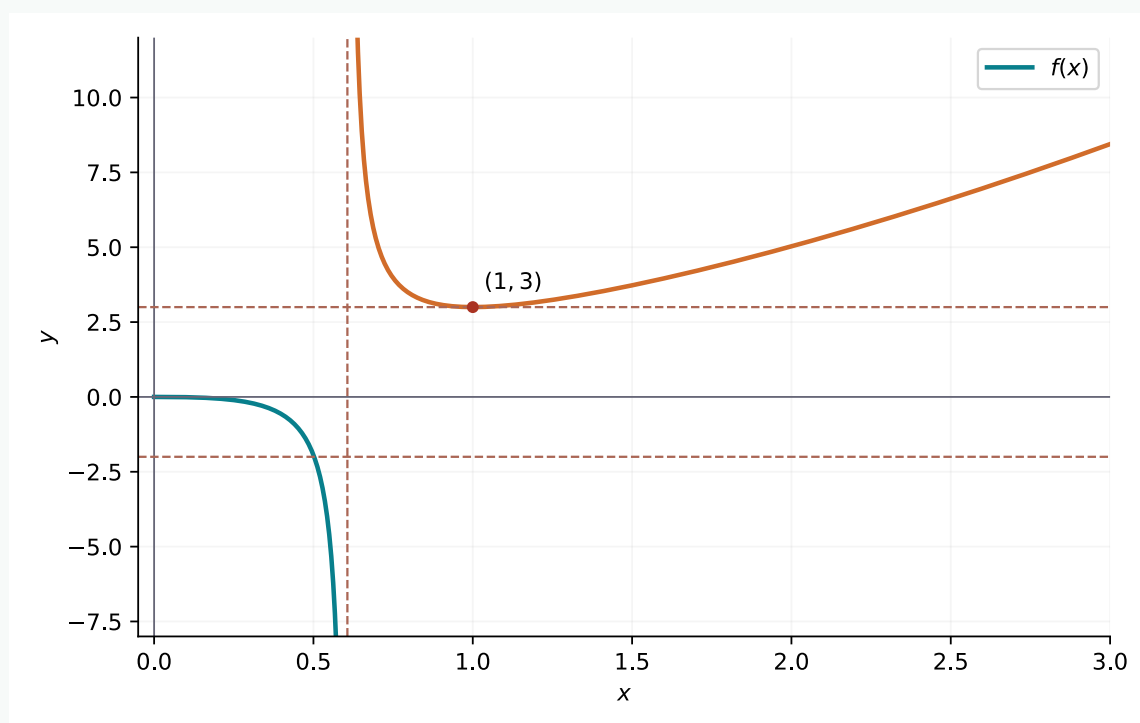
البند د

أي الرسوم I-IV يصف f ؟ علّوا.

1 . مطابقة الرسم

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0^-$$

الفرع الأيسر ينخفض إلى $-\infty$ ، والفرع الأيمن ينخفض من $+\infty$ إلى 3 ثم يتصاعد. الرسم المطابق هو III.



الجواب النهائي

الرسم III.

البند هـ

هل يقطع $y=t-5$ الرسم إذا كان $y=t$ مماساً أفقياً؟ وكم تقاطعاً؟

1. المستقيم المنقول

$$t = 3 \implies t - 5 = -2$$

2. عدّ التقاطعات

الفرع الأسير متناقص باستمرار من 0 إلى $-\infty$ فيقطع $y=-2$ مرة واحدة. الفرع الأيمن قيمه لا تقل عن 3، فلا يقطعه.

الجواب النهائي

نعم، يوجد تقاطع واحد فقط مع المستقيم $y=-2$.