

حلول امتحان البجروت 472

صيف 2024 . الموعد ب

حل أسئلة الامتحان كاملة بخطوات حسابية وتعليقات مفصلة

أجيبوا عن ثلاثة من الأسئلة الخمسة حسب اختياركم، وفق تعليمات هذه الدورة.

تتضمن هذه النسخة ورقة كل سؤال، ثم المعطيات والقوانين والتعويض وترتيب الحساب والجواب النهائي. جدول التغير أفقي، والتعويضات موضحة تحته.

يمكن استعمالها مستقلة عن البيئة التفاعلية.

حقوق النشر والطباعة | mathbagrut.com

© 2026 mathbagrut.com — حقوق الشرح والحلول والتصميم محفوظة. يُسمح بالتنزيل والطباعة للتعلم الشخصي أو الصفي مع إبقاء اسم الموقع. إعادة النشر أو البيع أو إزالة النسبة تحتاج إذنًا خطيًا. حقوق نصوص الأسئلة الأصلية ورسومها لأصحابها.

ورقة الأسئلة عربية رسمية من وزارة التربية والتعليم. الحلول والرسوم التوضيحية أصلية من إعداد mathbagrut.com، وليست حلولاً رسمية للوزارة.

السؤال 1 . حدود فردية وجمع متواليتين حسابيتين

الفصل الاول : المتواليات والمتجهات والتزايد والتضاؤل

1. معطاة متوالية حسابية A حدودها هي : $a_1, a_2, a_3, \dots$ وفيها 23 حدًا .
معطى أن : $a_{12} = 7$ ، فرق المتوالية هو 5 .
أ . جدوا a_1 .
ب . جدوا مجموع الحدود التي تقع في الأماكن الفردية في المتوالية .
معطاة متوالية حسابية B حدودها هي : $b_1, b_2, b_3, \dots$ وفيها 23 حدًا أيضًا . الحد الأول في المتوالية هو 3 .
نرمز d إلى فرق المتوالية B .
من جميع حدود المتواليتين A و B ، يبنون متوالية حسابية جديدة حدودها هي : $a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \dots$.
جـ . (1) جدوا الحد الأول في المتوالية الجديدة .
(2) عبّروا بدلالة d عن فرق المتوالية الجديدة .
(3) معطى أن مجموع كل الحدود في المتوالية الجديدة هو 3,013 .

البند أ

جدوا الحد الأول في A .

1 . التعويض في الحد العام

$$7 = a_1 + 11 \cdot 5$$

$$a_1 = 7 - 55 = -48$$

الجواب النهائي

$$a_1 = -48$$

البند ب

جدوا مجموع الحدود في الأماكن الفردية .

1 . تحديد المتوالية الجزئية

$$a_{23} = -48 + 22 \cdot 5 = 62$$

$$n_{\text{odd}} = 12, \quad d_{\text{odd}} = 2 \cdot 5 = 10$$

2 . المجموع

$$S_{\text{odd}} = \frac{12}{2}(-48 + 62) = 6 \cdot 14 = 84$$

الجواب النهائي

$$S_{\text{odd}} = 84$$

البند ج (1)

جدوا الحدّ الأوّل في المتوالية الجديدة.

1 . جمع الحدّين

$$c_1 = a_1 + b_1 = -48 + 3 = -45$$

الجواب النهائي

$$c_1 = -45$$

البند ج (2)

عبّروا عن فرق المتوالية الجديدة بدلالة d.

1 . طرح حدّين متتاليين

$$\begin{aligned} c_{n+1} - c_n &= (a_{n+1} + b_{n+1}) - (a_n + b_n) \\ &= (a_{n+1} - a_n) + (b_{n+1} - b_n) = 5 + d \end{aligned}$$

الجواب النهائي

$$d_C = 5 + d$$

البند ج (3)

جدوا d إذا كان مجموع المتوالية الجديدة 3013.

1 . معادلة المجموع

$$3013 = \frac{23}{2} [2(-45) + 22(5 + d)]$$

$$3013 = \frac{23}{2} (-90 + 110 + 22d)$$

$$3013 = 230 + 253d$$

$$2783 = 253d \implies d = 11$$

الجواب النهائي

$$d = 11$$

السؤال 2 . هرم قاعدته مربع

2. في الرسم الذي أمامكم الهرم ABCDE الذي قاعدته ABCD هي مربع .

النقطة M تقع على الضلع EC بحيث يتحقق $\overrightarrow{CM} = \frac{2}{3} \overrightarrow{CE}$.

AE يعامد قاعدة الهرم .

نرمز: $\overrightarrow{AB} = \underline{v}$ ، $\overrightarrow{AD} = \underline{u}$ ، $\overrightarrow{AE} = \underline{w}$.

معطى أن: $|\underline{w}| = |\underline{u}|$.

أ. (1) عبّروا عن المتجهين $\overrightarrow{AM}$ ، $\overrightarrow{CE}$ بدلالة $\underline{v}$ و $\underline{u}$ و $\underline{w}$.

(2) برهنوا أن $\overrightarrow{AM}$ يعامد $\overrightarrow{CE}$.

معطى أن: طول ضلع المربع ABCD هو 6 ، $A(0,0,0)$.

الرأس B يقع على الجزء الموجب للمحور x .

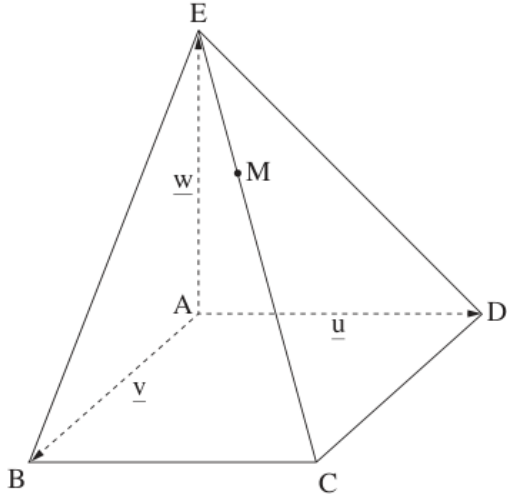
الرأس D يقع على الجزء الموجب للمحور y .

الرأس E يقع على الجزء الموجب للمحور z .

ب. (1) جدوا إحداثيات الرأسين E و C .

(2) جدوا إحداثيات النقطة M .

ج. احسبوا مساحة المثلث AMC .



البند أ (1)

عبّروا عن $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{CE}$ بدلالة $\underline{u}$ و $\underline{v}$ و $\underline{w}$.

1 . المتجه CE

$$\overrightarrow{AC} = \underline{u} + \underline{v}$$

$$\overrightarrow{CE} = \underline{w} - \underline{u} - \underline{v}$$

2 . المتجه AM

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} \\ &= \vec{u} + \vec{v} + \frac{2}{3}(\vec{w} - \vec{u} - \vec{v}) \\ &= \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} + \frac{2}{3}\vec{w}\end{aligned}$$

الجواب النهائي

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CE} &= \vec{w} - \vec{u} - \vec{v} \\ \overrightarrow{AM} &= \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} + \frac{2}{3}\vec{w}\end{aligned}$$

البند أ (2)

برهنوا أن AM يعامد CE.

1 . التعامد والأطوال

u و v ضلعان متعامدان ومتساويان في مربع، و w عمود على القاعدة ومعطى أن طوله يساوي طول u.

$$|\vec{u}| = |\vec{v}| = |\vec{w}| = s$$

2 . حساب الضرب العددي

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CE} = -\frac{1}{3}s^2 - \frac{1}{3}s^2 + \frac{2}{3}s^2 = 0$$

الجواب النهائي

$$AM \perp CE$$

البند ب (1)

جدوا إحداثيات E و C.

1 . تعيين الإحداثيات

$$B(6, 0, 0), \quad D(0, 6, 0)$$

$$C(6, 6, 0), \quad E(0, 0, 6)$$

الجواب النهائي

$$E(0, 0, 6), \quad C(6, 6, 0)$$

البند ب (2)

جدوا إحداثيات M.

1 . إحداثيات نقطة التقسيم

$$\overrightarrow{CE} = (-6, -6, 6)$$

$$M = (6, 6, 0) + \frac{2}{3}(-6, -6, 6)$$

$$M = (2, 2, 4)$$

الجواب النهائي

$$M(2, 2, 4)$$

البند ج

احسبوا مساحة المثلث AMC.

1 . طول الضلعين

$$AM = \sqrt{2^2 + 2^2 + 4^2} = 2\sqrt{6}$$

$$MC = \sqrt{(6-2)^2 + (6-2)^2 + (0-4)^2} = 4\sqrt{3}$$

2 . المساحة

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{6} \cdot 4\sqrt{3} = 4\sqrt{18} = 12\sqrt{2}$$

الجواب النهائي

$$S = 12\sqrt{2}$$

وحدة مربعة.

السؤال 3 . كمية العسل بين التضائل والنمو

3. منذ مطلع سنة 2018، تتضاءل كميّة العسل في منحل معيّن في كلّ شهر بنسبة مئوية ثابتة. بعد 8 أشهر، كانت كميّة العسل في المنحل 45% من كميّة العسل في مطلع سنة 2018.
- أ. جدوا النسبة المئوية التي تتضاءل بها كميّة العسل في كلّ شهر.
- ب. جدوا النسبة المئوية التي قلّت بها كميّة العسل في المنحل بعد مرور 10 أشهر منذ مطلع سنة 2018.
- ج. جدوا بعد مرور كم شهراً منذ مطلع سنة 2018 قلّت كميّة العسل بـ 33% بالمقارنة مع مطلع السنة.
- منذ مطلع سنة 2019 فصاعداً، تزايدت كميّة العسل في المنحل في كلّ شهر بنسبة مئوية ثابتة.
- في مطلع سنة 2019 كانت كميّة العسل في المنحل k كغم.
- الدالة $f(t) = k \cdot (1.05)^t$ تصف كميّة العسل في المنحل (بالكيلوغرامات) كدالة للزمن (بالأشهر).
- في مطلع سنة 2018 كانت كميّة العسل في المنحل 600 كغم.
- د. جدوا كميّة العسل التي كانت في المنحل في مطلع سنة 2021.

/ يتبع في صفحة 4 /

البند أ

جدوا نسبة التضائل الشهرية.

1 . عامل التضائل

$$H_0 q^8 = 0.45 H_0$$

$$q^8 = 0.45 \implies q = \sqrt[8]{0.45}$$

$$q \approx 0.9050062203$$

2 . النسبة

$$p = 100(1 - q)$$

$$p \approx 9.49937797\%$$

الجواب النهائي
نحو 9.50% شهرياً.

البند ب

بكم بالمئة قلّت كمية العسل بعد عشرة أشهر؟

1 . الجزء المتبقي والمنقوص

$$\frac{H(10)}{H_0} = q^{10} = 0.45^{10/8}$$

$$p_{10} = 100(1 - q^{10})$$

$$p_{10} \approx 63.14336835\%$$

الجواب النهائي
قلّت بنحو 63.14%.

البند ج

بعد كم شهراً قلّت الكمية بنسبة 33%؟

1 . المعادلة والحل

$$H_0 q^t = 0.67 H_0$$

$$q^t = 0.67$$

$$t = \frac{\ln 0.67}{\ln q}$$

$$t \approx 4.01226005$$

الجواب النهائي

بعد نحو 4.01 أشهر.

البند د

جدوا كمية العسل في مطلع 2021 إذا كانت البداية 600 كغم.

1 . الكمية في مطلع 2019

$$k = 600 q^{12} = 600 \cdot 0.45^{12/8}$$

$$k \approx 181.12150618$$

2 . الكمية في مطلع 2021

$$t = 24$$

$$H = k(1.05)^{24}$$

$$H = 600 \cdot 0.45^{12/8} \cdot 1.05^{24}$$

$$H \approx 584.13495938$$

الجواب النهائي

نحو 584.13 كغم.

السؤال 4 . كسر موجب وإزاحة رأسية

الفصل الثاني : حساب التفاضل والتكامل للدوال الأسية واللوغريتمية

4. معطاة الدالة $f(x) = \frac{e^{(ax-1)}}{x^2}$ ، a هو پارامتر .
- أ . (1) جدوا مجال تعريف الدالة $f(x)$.
- (2) جدوا معادلة خط التقارب المعامد للمحور x ، للدالة $f(x)$.
- (3) فسروا لماذا الدالة $f(x)$ موجبة ، بالنسبة لكل x في مجال تعريفها .
- معطى أن النقطة $\left(-1, \frac{1}{e^3}\right)$ تقع على الرسم البياني للدالة $f(x)$.
- ب . جدوا قيمة a .
- عوضوا $a = 2$ في الدالة $f(x)$ ، وأجيبوا عن البندين "جـ-د" .
- جـ . (1) جدوا إحداثيات النقطة القصوى للدالة $f(x)$ ، وحددوا نوع هذه النقطة .
- (2) ارسموا رسماً بيانياً تقريبياً للدالة $f(x)$.
- معطاة الدالة $g(x) = f(x) + k$ ، k هو پارامتر .
- معطى أنه توجد للمستقيم $y = -2e$ ولرسم البياني للدالة $g(x)$ نقطتان مشتركتان بالضبط .
- د . جدوا قيمة k .

/ يتبع في صفحة 5 /

البند أ (1)

جدوا مجال $f(x) = e^{(ax-1)}/x^2$.

1 . شرط التعريف

$$x^2 \neq 0 \iff x \neq 0$$

الجواب النهائي

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

البند أ (2)

جدوا خط التقارب العمودي.

1 . النهاية

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{e^{ax-1}}{x^2} = +\infty$$

الجواب النهائي

$$x = 0$$

البند أ (3)

لماذا f موجبة في مجالها؟

1 . فحص الإشارة

$$e^{ax-1} > 0, \quad x^2 > 0 \quad (x \neq 0)$$

قسمة موجب على موجب تعطي موجباً.

الجواب النهائي

f موجبة لكل x في مجال تعريفها.

البند ب

جدوا a من النقطة $(e^3/1, 1-)$.

1 . التعويض

$$\frac{e^{-a-1}}{(-1)^2} = e^{-3}$$

$$-a - 1 = -3$$

$$a = 2$$

الجواب النهائي

$$a = 2$$

البند ج (1)

جدوا النقطة القصوى عند $a=2$ ونوعها.

1 . مشتقة الكسر

مشتقة البسط ضرب المقام، سالب مشتقة المقام ضرب البسط، تقسيم مربع المقام.

$$f'(x) = \frac{2e^{2x-1}x^2 - 2xe^{2x-1}}{x^4}$$

2 . التحليل والتبسيط

$$f'(x) = \frac{2xe^{2x-1}(x-1)}{x^4} = \frac{2e^{2x-1}(x-1)}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \iff x = 1$$

3 . الجدول والتعويضات

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \infty)$
قيمة فحص	-1	-	1/2	1	2
f'(x)	+	×	-	0	+
f(x)	تزايد ↗	غير معرفة	تناقص ↘	صغرى	تزايد ↗

الفترة مرتبة من اليسار إلى اليمين؛ نقاط عدم التعريف ليست نقاطاً قصوى.

$$f'(-1) = 4e^{-3} > 0, \quad f'(1/2) = -8 < 0, \quad f'(2) = e^3/4 > 0$$

$$f(1) = e$$

الجواب النهائي

$$(1, e)$$

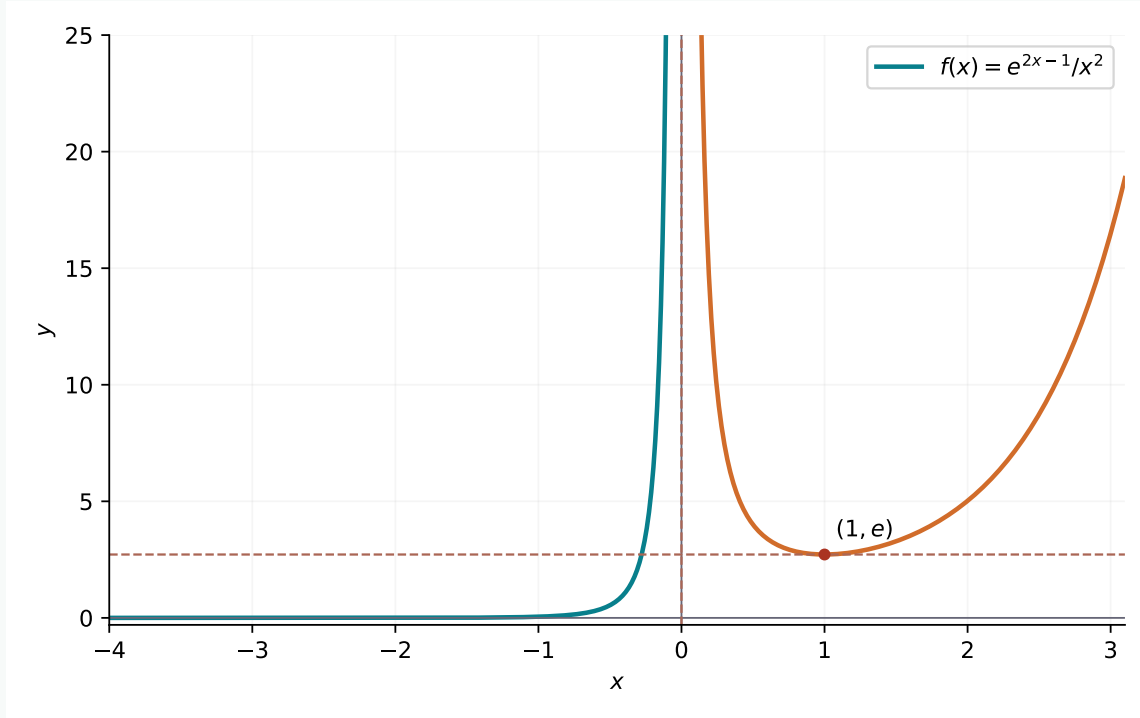
نقطة صغرى محلية.

البند ج (2)

ارسموا رسماً تقريبياً للدالة f.

1 . الأطراف

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^+, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$$



الجواب النهائي
الرسم موضح أعلاه.

البند د

جدوا k إذا كان $y = -2e$ يلتقي $g = f + k$ في نقطتين بالضبط.

1 . إعادة كتابة المعادلة

$$f(x) + k = -2e \iff f(x) = -2e - k$$

2 . عدد التقاطعات

لأي ارتفاع موجب يوجد تقاطع واحد مع الفرع الأيسر. في الفرع الأيمن يوجد صفر تقاطعات إذا كان الارتفاع أقل من e ، وتقاطع واحد عند e ، وتقاطعان إذا كان أكبر من e . لنحصل على نقطتين بالمجموع يجب أن يكون الارتفاع e .

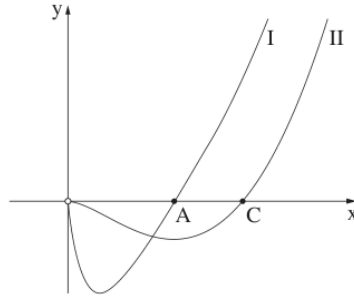
3. إيجاد k

$$-2e - k = e \implies k = -3e$$

الجواب النهائي

$$k = -3e$$

السؤال 5 . تمييز الدالة ومشتقتها



5. الرسم الذي أمامكم يصف رسمين بيانيين، I و II .
 أحد الرسمين البيانيين يصف الدالة $f(x)$ ، والآخر يصف دالة المشتقة $f'(x)$.
 أ. حددوا أيًا من الرسمين البيانيين I ، II يصف الرسم البياني لدالة المشتقة $f'(x)$. علّلوا تحديدكم .
 معطى أن: $f(x) = x^2 \cdot (2\ln(x) - 1)$.
 ب. (1) جدوا مجال تعريف الدالة $f(x)$.
 (2) جدوا إحداثيات النقطة القصوى للدالة $f(x)$ ، وحددوا نوع هذه النقطة حسب الرسم البياني .
 النقطة A هي نقطة تقاطع الرسم البياني I مع المحور x ، والنقطة C هي نقطة تقاطع الرسم البياني II مع المحور x .
 ج. جدوا طول القطعة AC .
 مرّروا عبر النقطة C مستقيمًا موازيًا للمحور y .
 د. جدوا المساحة المحصورة بين الرسم البياني I والمستقيم الموازي للمحور y والمحور x (المساحة التي في الربع الأول) .

בהצלחה!

נשמתי לכם הצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל.
 אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך.
 حقوق الطبع محفوظة لدولة إسرائيل.
 النسخ أو النشر ممنوعان إلا بإذن من وزارة التربية والتعليم.

البند أ

أي الرسمين I و II يصف المشتقة؟ علّوا.

1 . المطابقة

الرسم I يقطع محور x عند إحداثي النقطة الصغرى للرسم II. وهو سالب قبلها وموجب بعدها؛ لذلك I هو رسم f' ، و II هو رسم f .

الجواب النهائي

الرسم I يصف f' .

البند ب (1)

جدوا مجال $f(x)=x^2(2\ln x-1)$.

1 . المجال

$$x > 0$$

الجواب النهائي

$$D_f = (0, \infty)$$

البند ب (2)

جدوا النقطة القصوى ونوعها.

1 . الاشتقاق

$$f'(x) = 2x(2\ln x - 1) + x^2 \cdot \frac{2}{x}$$

$$f'(x) = 4x \ln x - 2x + 2x = 4x \ln x$$

$$f'(x) = 0 \iff x = 1$$

2. الإشارة والقيمة

x	(0, 1)	1	(1, ∞)
قيمة فحص	e^{-1}	1	e
f'(x)	-	0	+
f(x)	تناقص ↘	صغرى	تزايد ↗

الفترة مرتبة من اليسار إلى اليمين؛ نقاط عدم التعريف ليست نقاطاً قصوى.

$$f'(e^{-1}) = -4/e < 0, \quad f'(e) = 4e > 0$$

$$f(1) = -1$$

الجواب النهائي

$$(1, -1)$$

نقطة صغرى مطلقة.

البند ج

جدوا طول AC.

1. إحداثيا الطرفين

$$x_A = 1$$

$$f(x) = 0 \iff 2 \ln x - 1 = 0 \iff x_C = e^{1/2}$$

2. طول القطعة على محور x

$$AC = x_C - x_A = \sqrt{e} - 1$$

الجواب النهائي

$$AC = \sqrt{e} - 1$$

البند د

جدوا المساحة في الربع الأول بين الرسم I ومحور x والعمود عبر C.

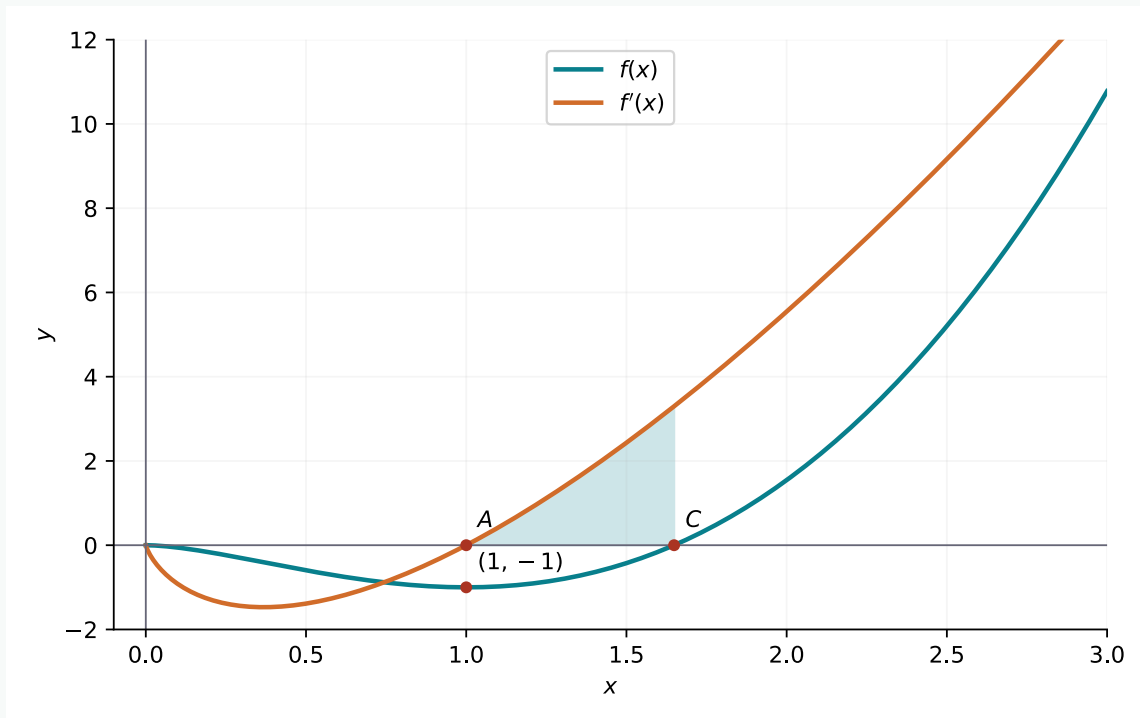
1. التكامل المحدد

$$S = \int_1^{\sqrt{e}} f'(x) dx$$

$$S = f(\sqrt{e}) - f(1)$$

$$S = 0 - (-1) = 1$$

2. الرسم



الجواب النهائي

المساحة 1 وحدة مربعة.