

حلول امتحان البجروت 472

صيف 2024 . الموعد أ

حل أسئلة الامتحان كاملة بخطوات حسابية وتعليقات مفصلة

أجيبوا عن ثلاثة من الأسئلة الخمسة حسب اختياركم، وفق تعليمات هذه الدورة.

تتضمن هذه النسخة ورقة كل سؤال، ثم المعطيات والقوانين والتعويض وترتيب الحساب والجواب النهائي. جدول التغير أفقي، والتعويضات موضحة تحته.

يمكن استعمالها مستقلة عن البيئة التفاعلية.

حقوق النشر والطباعة | mathbagrut.com

© 2026 mathbagrut.com — حقوق الشرح والحلول والتصميم محفوظة. يُسمح بالتنزيل والطباعة للتعلم الشخصي أو الصفي مع إبقاء اسم الموقع. إعادة النشر أو البيع أو إزالة النسبة تحتاج إذنًا خطيًا. حقوق نصوص الأسئلة الأصلية ورسومها لأصحابها.

ورقة الأسئلة عربية رسمية من وزارة التربية والتعليم. الحلول والرسوم التوضيحية أصلية من إعداد mathbagrut.com، وليست حلولاً رسمية للوزارة.

السؤال 1 . مسافرون في عربات قطار

الفصل الاول : المتواليات والمتجهات والتزايد والتضاؤل

1. لقطار معين توجد 11 عربة . يوم الأحد، كان عدد المسافرين في كل عربة أكبر بعدد ثابت من عدد المسافرين في العربة التي قبلها .
- عدد المسافرين في العربة الأخيرة كان 3 أضعاف عدد المسافرين في العربة الأولى .
- في هذا اليوم، العدد الكلي للمسافرين في القطار كان 220 مسافرًا .
- أ. جدوا كم مسافرًا كان في العربة الأولى .
- ب. جدوا كم مسافرًا كان في العربة الوسطى .
- ج. جدوا العدد الكلي للمسافرين الذين كانوا في العربات الفردية (في العربة الأولى والثالثة والخامسة وهكذا) .
- يوم الإثنين، كان عدد المسافرين في القطار ضعف عدد المسافرين فيه يوم الأحد، لذلك تقرر إضافة عربات إلى القطار .
- يوم الإثنين، عدد المسافرين في كل عربة كان أكبر بـ 3 من عدد المسافرين في العربة التي قبلها .
- في هذا اليوم، كان في العربة الأولى 5 مسافرين .
- د. جدوا عدد العربات التي أضافوها إلى القطار يوم الإثنين .

البند أ

جدوا عدد المسافرين في العربة الأولى يوم الأحد.

1 . قانون المجموع

$$a_{11} = 3a_1$$

$$220 = \frac{11}{2}(a_1 + 3a_1)$$

$$220 = 22a_1 \implies a_1 = 10$$

الجواب النهائي

10 مسافرين.

البند ب

جدوا عدد المسافرين في العربة الوسطى.

1 . الفرق ثم الحد الأوسط

$$a_{11} = 30 = 10 + 10d$$

$$20 = 10d \implies d = 2$$

$$a_6 = 10 + 5 \cdot 2 = 20$$

الجواب النهائي

20 مسافراً.

البند ج

جدوا مجموع المسافرين في العربات الفردية.

1 . تحديد المتوالية الجزئية

$$n = 6, \quad a_1 = 10, \quad a_{11} = 30, \quad d_{\text{odd}} = 4$$

2 . حساب المجموع

$$S_{\text{odd}} = \frac{6}{2}(10 + 30) = 120$$

الجواب النهائي

120 مسافراً.

البند د

جدوا عدد العربات المضافة يوم الإثنين.

1 . معادلة عدد العربات

$$S_n = 2 \cdot 220 = 440, \quad b_1 = 5, \quad d = 3$$

$$440 = \frac{n}{2}[10 + 3(n - 1)]$$

$$880 = 3n^2 + 7n$$

$$3n^2 + 7n - 880 = 0$$

2 . حل المعادلة

$$(n - 16)(3n + 55) = 0$$

$$n = 16 \quad \text{or} \quad n = -55/3$$

3 . اختيار الجذر وطرح العربات الأصلية

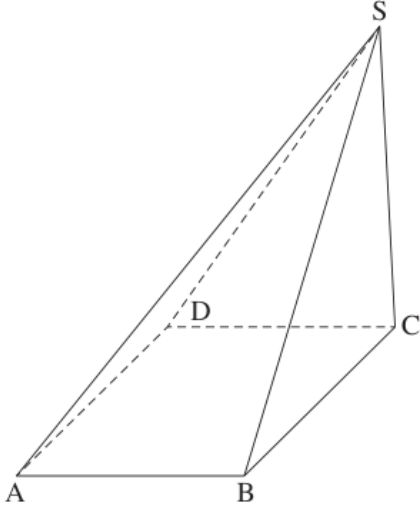
نرفض الجذر السالب لأن عدد العربات موجب.

$$16 - 11 = 5$$

الجواب النهائي

أضيفت 5 عربات.

السؤال 2 . إثبات ارتفاع الهرم باستعمال المتجهات



2. الرسم الذي أمامكم يصف الهرم SABCD .
 القاعدة ABCD هي مربع طول ضلعه هو 4 .
 نرمز: $\overrightarrow{AS} = \underline{w}$ ، $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$ ، $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.
 أ. عبّروا بدلالة $\underline{u}$ و $\underline{v}$ و $\underline{w}$ ، إذا دعت الحاجة، عن المتجه $\overrightarrow{SD}$.
 معطى أن: $\overrightarrow{SD} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.
 ب. جدوا قيمة $\underline{w} \cdot \underline{v}$.
 معطى أن: $|\overrightarrow{SC}| = \sqrt{17}$ ، $\underline{w} \cdot \underline{u} = \underline{w} \cdot \underline{v}$.
 ج. جدوا قيمة $|\underline{w}|$.
 د. (1) برهنوا أن SC يعامد BC و DC .
 (2) جدوا حجم الهرم SABCD .

البند أ

عبّروا عن SD بدلالة المتجهات.

1 . جمع متجهات المسار

$$\overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AD} = -\vec{w} + \vec{v}$$

الجواب النهائي

$$\overrightarrow{SD} = \vec{v} - \vec{w}$$

البند ب

جدوا $\underline{w} \cdot \underline{v}$ من المعطى $\overrightarrow{SD} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.

1. الضرب العددي

$$(\vec{v} - \vec{w}) \cdot \vec{v} = 0$$

$$|\vec{v}|^2 - \vec{w} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = 4^2 = 16$$

الجواب النهائي

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = 16$$

البند ج

جدوا طول w إذا كان $SC = \sqrt{17}$ و $w \cdot u = w \cdot v$.

1. المتجه SC

$$\vec{SC} = \vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0, \quad \vec{w} \cdot \vec{u} = \vec{w} \cdot \vec{v} = 16$$

2. مربع الطول

$$17 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} - 2\vec{w} \cdot \vec{u} - 2\vec{w} \cdot \vec{v}$$

$$17 = 16 + 16 + |\vec{w}|^2 - 32 - 32$$

$$|\vec{w}|^2 = 49 \implies |\vec{w}| = 7$$

الجواب النهائي

$$|\vec{w}| = 7$$

البند د (1)

برهنوا أن SC يعامد BC و DC .

1. التعامد مع BC

$$\vec{SC} \cdot \vec{BC} = (\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}) \cdot \vec{v}$$

$$= 0 + 16 - 16 = 0$$

2 . التعمد مع DC

$$\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{DC} = (\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}) \cdot \vec{u}$$

$$= 16 + 0 - 16 = 0$$

الجواب النهائي

$$SC \perp BC, \quad SC \perp DC$$

البند د (2)

جدوا حجم الهرم.

1 . تحديد الارتفاع

BC و DC يتقاطعان عند C وفي مستوى القاعدة. لذلك SC عمودي على القاعدة، وطوله $\sqrt{17}$.

$$h = \sqrt{17}, \quad S_{ABCD} = 4^2 = 16$$

2 . حجم الهرم

$$V = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot \sqrt{17} = \frac{16\sqrt{17}}{3}$$

الجواب النهائي

$$V = 16\sqrt{17}/3$$

وحدة مكعبة.

السؤال 3 . قيمتا شقتين عبر السنوات

3. معطاة شقتان – الشقة "أ" والشقة "ب".
- في مطلع سنة 2014، كانت قيمة الشقة "أ" 980,000 شيكل، وكانت قيمة الشقة "ب" 620,000 شيكل.
- قيمة الشقة "أ" تتزايد كل سنة بـ 7%، وقيمة الشقة "ب" تتزايد كل سنة بـ q أضعاف.
- بعد مرور عدد معين من السنوات، كانت قيمة الشقة "أ" مساوية لقيمة الشقة "ب".
- أ. أمامكم ثلاثة ادعاءات (I)–(III). حددوا ما هو الادعاء الصحيح. علّلوا تحديدكم.
- (I) $q < 1.07$ (II) $q = 1.07$ (III) $q > 1.07$
- معطى أنه في مطلع سنة 2024 كانت قيمة الشقة "أ" مساوية لقيمة الشقة "ب".
- ب. (1) جدوا كم كانت قيمة الشقة "أ" في مطلع هذه السنة.
- (2) جدوا ما هي النسبة المئوية التي تتزايد بها قيمة الشقة "ب" كل سنة.
- حسب التوقع، منذ مطلع سنة 2024 فصاعداً، قيمة الشقة "ب" ستتضاءل كل سنة بنسبة مئوية أقل بـ 1.5 أضعاف النسبة المئوية التي وجدتوها في البند الفرعي "ب" (2).
- ج. حسب هذا التوقع، في مطلع أية سنة ستتضاءل قيمة الشقة "ب" لأول مرة بالمقارنة مع قيمتها التي كانت في مطلع سنة 2014؟

/ يتبع في صفحة 4 /

البند أ

أي ادعاء حول q صحيح؟

1 . المقارنة

إذا كان $q \leq 1.07$ ، فتبقى ب أقل لأن قيمتها الابتدائية أصغر. وجود تساوي لاحق يقتضي $q > 1.07$.

الجواب النهائي

الادعاء III صحيح: $q > 1.07$.

البند ب (1)

جدوا قيمة الشقة أ في مطلع 2024.

1 . التعويض في نموذج النمو

$$A(10) = 980000(1.07)^{10}$$

$$A(10) \approx 1927808.33014378$$

الجواب النهائي

نحو 1,927,808.33 شيكل.

البند ب (2)

جدوا نسبة الزيادة السنوية في قيمة ب.

1 . عامل النمو

$$620000q^{10} = 980000(1.07)^{10}$$

$$q = \left(\frac{980000(1.07)^{10}}{620000} \right)^{1/10}$$

$$q \approx 1.1201268724$$

2 . النسبة

$$p_B = 100(q - 1)$$

$$p_B \approx 12.01268724\%$$

الجواب النهائي

نحو 12.01% سنوياً.

البند جـ

في مطلع أي سنة تصبح قيمة ب أقل من قيمتها في مطلع 2014 لأول مرة؟

1 . عامل الانخفاض الجديد

$$p_{\text{decrease}} = \frac{p_B}{1.5}$$

$$p_{\text{decrease}} \approx 8.00845816\%$$

$$r = 1 - \frac{p_B}{150}$$

$$r \approx 0.9199154184$$

2 . حل المتباينة

نقيس الزمن بالسنوات منذ مطلع 2024. نبث عن أول عدد صحيح موجب للسنوات يحقق انخفاض القيمة عن 620000.

$$Vr^t < 620000$$

$$t \ln r < \ln(620000/V)$$

بما أن $\ln r$ سالب، تنعكس إشارة المتباينة عند القسمة عليه.

$$t > \frac{\ln(620000/V)}{\ln r}$$

$$t > 13.59016817$$

3. اختيار أول مطلع سنة

$$t_{\text{integer}} = 14$$

$$2024 + 14 = 2038$$

الجواب النهائي

في مطلع سنة 2038 لأول مرة.

السؤال 4 . كسر أسّي ودالة منعكسة

الفصل الثاني : حساب التفاضل والتكامل للدوال الأسية واللوغريتمية

4. معطاة الدالة $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x - 3}$.

أ. (1) جدوا مجال تعريف الدالة $f(x)$.

(2) جدوا معادلة خط التقارب المعامد للمحور x ، للدالة $f(x)$.

ب. جدوا إحداثيات نقاط تقاطع الرسم البياني للدالة $f(x)$ مع المحورين (إذا وُجدت مثل هذه النقاط) .

ج. جدوا إحداثيات النقطة القصوى للدالة $f(x)$ ، وحددوا نوع هذه النقطة .

د. جدوا مجالات تصاعد وتنازل الدالة $f(x)$.

هـ. ارسموا رسماً بيانياً تقريبياً للدالة $f(x)$.

معطاة الدالة $g(x)$ ، التي تحقق $g(x) = -f(x) + 15$.

الدالتان $f(x)$ و $g(x)$ معرفتان في نفس المجال .

و. (1) جدوا إحداثيات النقطة القصوى للدالة $g(x)$ ، وحددوا نوع هذه النقطة .

(2) كم نقطة تقاطع توجد للرسم البياني للدالة $g(x)$ مع المحور x ؟ علّلوا إجابتكم .

/ يتبع في صفحة 5 /

البند أ (1)

جدوا مجال التعريف.

1 . شرط المقام

$$e^x - 3 \neq 0 \iff x \neq \ln 3$$

الجواب النهائي

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{\ln 3\}$$

البند أ (2)

جدوا خط التقارب العمودي.

1 . فحص البسط

$$e^{2\ln 3} = 9 \neq 0$$

الجواب النهائي

$$x = \ln 3$$

البند ب

جدوا التقاطعات مع المحورين.

1 . محور x

e^{2x} لا يساوي صفرًا، لذلك لا يوجد تقاطع مع محور x.

2 . محور y

$$f(0) = \frac{1}{1-3} = -\frac{1}{2}$$

الجواب النهائي

$$(0, -1/2)$$

لا يوجد تقاطع مع محور x.

البند ج

جدوا النقطة القصوى ونوعها.

1 . قاعدة مشتقة الكسر

مشتقة البسط ضرب المقام، سالب مشتقة المقام ضرب البسط، تقسيم مربع المقام.

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}(e^x - 3) - e^x e^{2x}}{(e^x - 3)^2}$$

2 . التبسيط والحل

$$f'(x) = \frac{2e^{3x} - 6e^{2x} - e^{3x}}{(e^x - 3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^{2x}(e^x - 6)}{(e^x - 3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \iff x = \ln 6$$

3 . الإشارة والقيمة

x	$(-\infty, \ln 3)$	$\ln 3$	$(\ln 3, \ln 6)$	$\ln 6$	$(\ln 6, \infty)$
قيمة فحص	0	—	$\ln 4$	$\ln 6$	$\ln 9$
f(x)	—	×	—	0	+
f(x)	تناقص ↘	غير معرفة	تناقص ↘	صغرى	تزايد ↗

الفترة مرتبة من اليسار إلى اليمين؛ نقاط عدم التعريف ليست نقاطاً قصوى.

$$f'(0) = -5/4 < 0, \quad f'(\ln 4) = -32 < 0, \quad f'(\ln 9) = 27/4 > 0$$

$$f(\ln 6) = 36/(6 - 3) = 12$$

الجواب النهائي

$$(\ln 6, 12)$$

نقطة صغرى محلية.

البند د

جدوا مجالات التصاعد والتنازل.

1 . استخلاص المجالات

المشتقة سالبة قبل $\ln 6$ باستثناء نقطة عدم التعريف، وموجبة بعد $\ln 6$.

الجواب النهائي

تنازل في $(\ln 3, \infty -)$ وفي $(\ln 3, \ln 6)$. تصاعد في $(\infty, \ln 6)$.

البند هـ

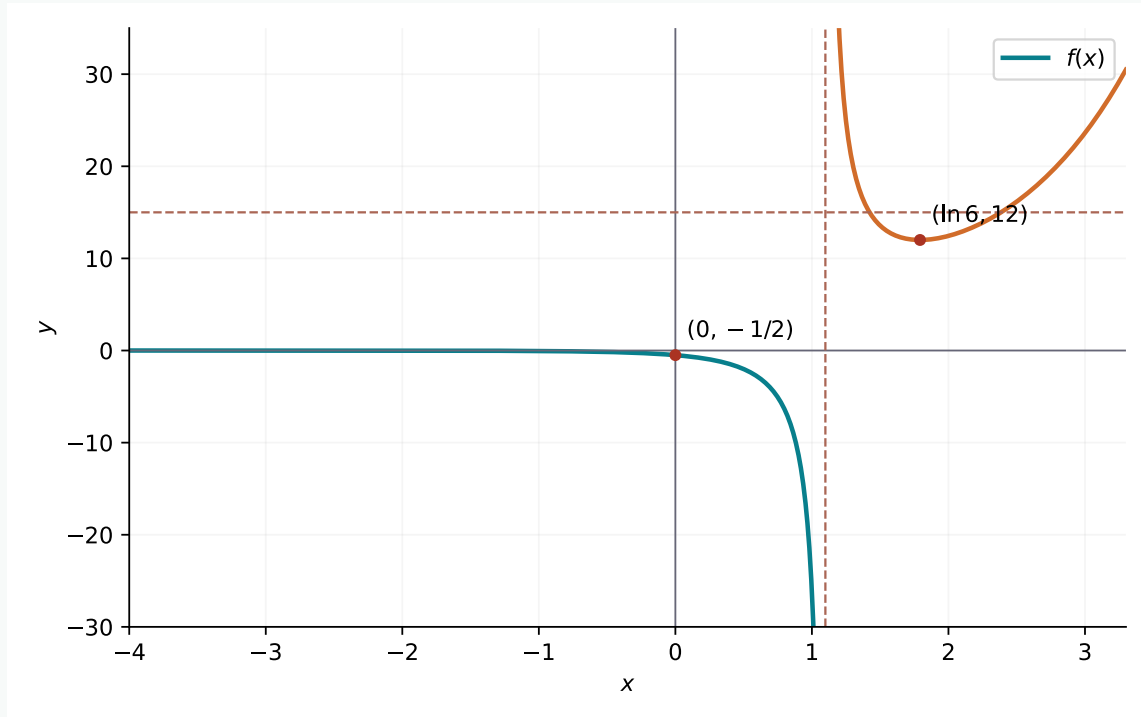
ارسموا رسماً تقريبياً للدالة.

1 . النهايات

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow (\ln 3)^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow (\ln 3)^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$$



خط $y=15$ مساعد لحساب تقاطعات الدالة المحوّلة.

الجواب النهائي
الرسم موضح أعلاه.

البند و (1)

جدوا النقطة القصوى لـ $g = -f + 15$ ونوعها.

1. تحويل النقطة

$$g(\ln 6) = -12 + 15 = 3$$

2. نوع النقطة

صغرى f تصبح عظمى محلية في g بسبب الضرب في -1 .

الجواب النهائي

$$(\ln 6, 3)$$

نقطة عظمى محلية.

البند و (2)

كم تقاطعاً لـ g مع محور x ؟

1. المعادلة

$$-f(x) + 15 = 0 \iff f(x) = 15$$

2. عدّ التقاطعات

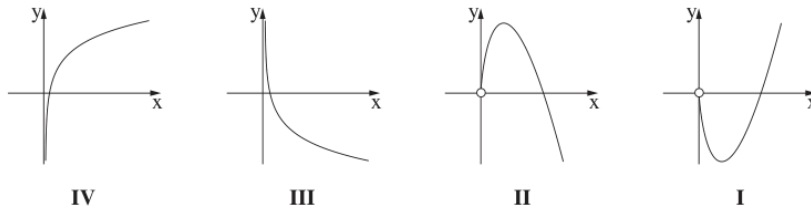
الفرع الأيسر لـ f سالب فلا يقطع $y=15$. في الفرع الأيمن الصغرى $15 > 12$ ، لذلك يوجد تقاطع في كل جانب من الصغرى.

الجواب النهائي

نقطتا تقاطع.

السؤال 5 . دالة $ax \ln(2x)$ وميل المماس

5. معطاة الدالة $f(x) = ax \cdot \ln(2x)$ ، a هو پارامتر .
- أ . جدوا مجال تعريف الدالة $f(x)$.
- معطى أن مميل المماس للرسم البياني للدالة $f(x)$ في النقطة التي فيها $x = \frac{e}{2}$ هو 6 .
- ب . جدوا a .
- عوضوا $a = 3$ في الدالة $f(x)$ ، وأجيبوا عن البنود "ج-و" .
- ج . جدوا إحداثيات نقطة تقاطع الرسم البياني للدالة $f(x)$ مع المحور x .
- د . جدوا إحداثيات النقطة القصوى للدالة $f(x)$ ، وحددوا نوع هذه النقطة .
- هـ . حددوا أي رسم بياني من الرسوم البيانية IV-I التي في آخر السؤال يصف الدالة $f(x)$ ، وأي رسم بياني منها يصف دالة المشتقة $f'(x)$. عللوا تحديدكم .
- و . احسبوا المساحة المحصورة بين الرسم البياني لدالة المشتقة $f'(x)$ والمستقيم $x = e$ والمحور x .



בהצלחה!

נשמתי לכם הצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל.

אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך.

חقوق الطبع محفوظة לדولة إسرائيل.

النسخ أو النشر ممنوعان إلا بإذن من وزارة التربية والتعليم.

البند أ

جدوا مجال التعريف.

1 · شرط اللوغاريتم

$$2x > 0 \iff x > 0$$

الجواب النهائي

$$D_f = (0, \infty)$$

البند ب

جدوا a إذا كان ميل المماس عند $x=e/2$ هو 6.

1 · المشتقة

$$f'(x) = a \ln(2x) + ax \frac{2}{2x} = a[\ln(2x) + 1]$$

2 · التعويض بالميل

$$f'(e/2) = a(1 + 1) = 6$$

$$2a = 6 \implies a = 3$$

الجواب النهائي

$$a = 3$$

البند ج

جدوا نقطة التقاطع مع محور x .

1 · معادلة الصفر

$$3x \ln(2x) = 0 \iff \ln(2x) = 0$$

$$2x = 1 \implies x = 1/2$$

الجواب النهائي

$$(1/2, 0)$$

البند د

جدوا النقطة القصوى ونوعها.

1. صفر المشتقة

$$\ln(2x) = -1 \implies 2x = e^{-1} \implies x = \frac{1}{2e}$$

2. الإشارة والقيمة

x	$(0, 1/(2e))$	$1/(2e)$	$(1/(2e), \infty)$
قيمة فحص	$1/(2e^2)$	$1/(2e)$	$1/2$
f'(x)	-	0	+
f(x)	تناقص ↘	صغرى	تزايد ↗

الفترة مرتبة من اليسار إلى اليمين؛ نقاط عدم التعريف ليست نقاطاً قصوى.

$$f'(1/(2e^2)) = -3 < 0, \quad f'(1/2) = 3 > 0$$

$$f(1/(2e)) = -3/(2e)$$

الجواب النهائي

$$\left(\frac{1}{2e}, -\frac{3}{2e} \right)$$

نقطة صغرى مطلقة.

البند هـ

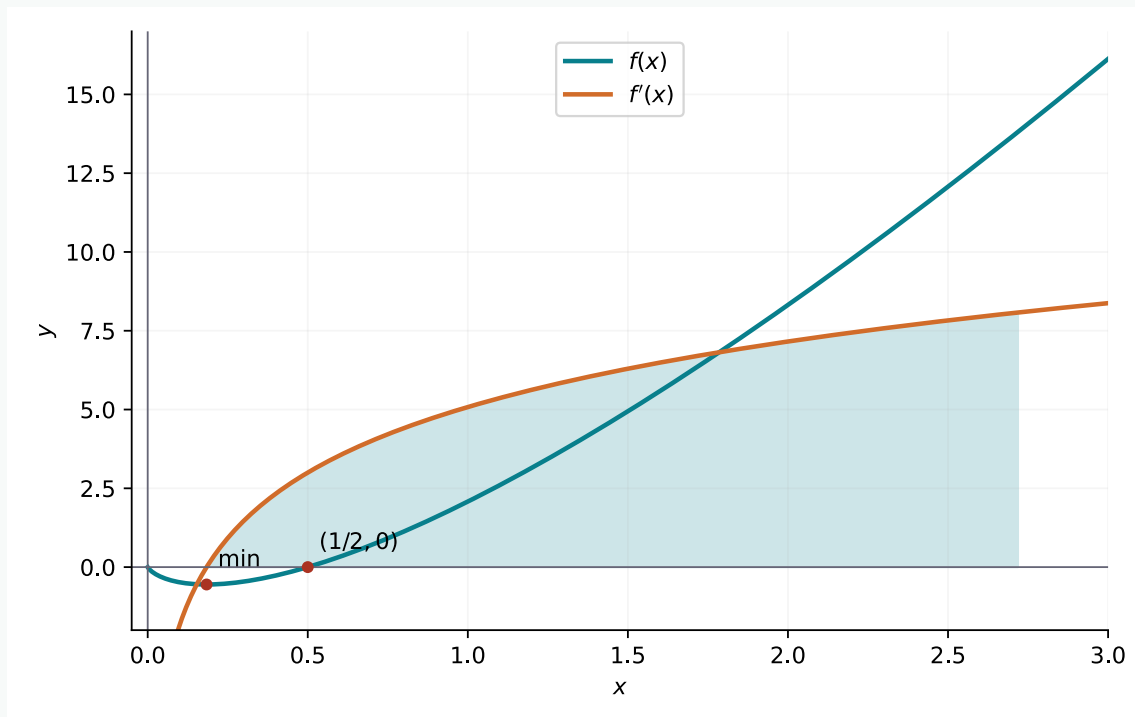
حدّدوا رسم f ورسم f' من I-IV.

1 . مطابقة الرسمين

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0^-$$

$$f'(x) = 3 \ln(2x) + 3, \quad f''(x) = 3/x > 0$$

الرسم I يصف f، والرسم IV يصف f'.



الجواب النهائي

f: الرسم I. المشتقة f': الرسم IV.

البند و

احسبوا المساحة بين f' ومحور x والمستقيم x=e.

1 . التكامل وحدوده

$$S = \int_{1/(2e)}^e f'(x) dx$$

$$S = f(e) - f(1/(2e))$$

2 . التعويض

$$f(e) = 3e \ln(2e) = 3e(1 + \ln 2)$$

$$S = 3e(1 + \ln 2) - \left(-\frac{3}{2e}\right)$$

$$S = 3e(1 + \ln 2) + \frac{3}{2e}$$

الجواب النهائي

$$S = 3e(1 + \ln 2) + 3/(2e)$$

وحدة مربعة.