

حلول امتحان البجروت 472

شتاء 2023 · ترجمة تعليمية عربية

حل أسئلة الامتحان كاملة بخطوات حسابية وتعليقات مفصلة

أجيبوا عن ثلاثة أسئلة، على الأقل عن سؤال واحد من كل فصل، وفق تعليمات هذه الدورة.

تتضمن هذه النسخة ورقة كل سؤال، ثم المعطيات والقوانين والتعويض وترتيب الحساب والجواب النهائي. جدول التغير أفقي، والتعويضات موضحة تحته.

يمكن استعمالها مستقلة عن البيئة التفاعلية.

حقوق النشر والطباعة | mathbagrut.com

© 2026 mathbagrut.com — حقوق الشرح والحلول والتصميم محفوظة. يُسمح بالتنزيل والطباعة للتعلم الشخصي أو الصفي مع إبقاء اسم الموقع. إعادة النشر أو البيع أو إزالة النسبة تحتاج إذنًا خطيًا. حقوق نصوص الأسئلة الأصلية ورسومها لأصحابها.

ورقة الأسئلة ترجمة تعليمية عربية مرفقة؛ راجعوا الورقة الرسمية عند الحاجة. الحلول والرسوم التوضيحية أصلية من إعداد mathbagrut.com، وليست حلولاً رسمية للوزارة.

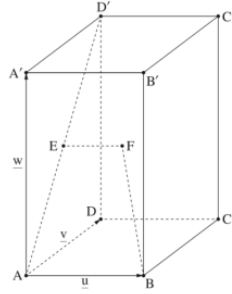
السؤال 1 . صندوق وشبه منحرف داخله

الأسئلة

انتهوا: فسروا كل خطواتكم، بما في ذلك الحسابات، بالتفصيل وبشكل واضح.
عدم التفصيل قد يؤدي إلى خصم درجات أو إلى إلغاء الامتحان.
أجبوا عن ثلاثة من الأسئلة 1-5، على الأقل عن سؤال واحد من كل فصل (لكل سؤال - 33 1/3 درجة).
انتهوا: إذا أجبت عن أكثر من ثلاثة أسئلة، تُفحص فقط الإجابات الثلاث الأولى التي في دفتركم.

1. الفصل الأول - هندسة في الفراغ، إحصاء

يصف الرسم صندوقاً $ABCD A'B'C'D'$. النقطة E هي نقطة التقاء قطري الوجه $AA'D'D$.
نرمز: $\overrightarrow{AA'} = w$, $\overrightarrow{AD} = v$, $\overrightarrow{AB} = u$.
النقطة F تحقق $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}u$.



- أ. (1) عبّروا عن المتجهين $\overrightarrow{BD'}$ و $\overrightarrow{AE}$ بدلالة u, v, w .
(2) أثبتوا أنّ $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD'}$.

- ب. (1) فسّروا لماذا $EF \parallel AB$.
(2) أثبتوا أنّ $AB \perp AE$.

- معطى أنّ قاعدة الصندوق $ABCD$ مربع طول ضلعه 2، وحجم الصندوق 16.
ج. (1) احسبوا طول الحرف الجانبي للصندوق.
(2) احسبوا طول المتجه $\overrightarrow{BF}$.

- د. (1) احسبوا قياس الزاوية $\angle ABF$.
(2) جدوا قياسات باقي زوايا الشكل الرباعي $AEFB$.

البند أ (1)

عبّروا عن $\overrightarrow{AE}$ و $\overrightarrow{BD'}$ بدلالة u و v و w .

1 . متجه موضع E

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$$

2 . متجه القطر 'BD

$$\overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD'}$$

$$\overrightarrow{BD'} = -\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$$

الجواب النهائي

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}(\vec{v} + \vec{w})$$

$$\overrightarrow{BD'} = -\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$$

البند أ (2)

أثبتوا أن BF يساوي نصف BD كمتجهين.

1 . حساب BF من المسار B→A→E→F

$$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF}$$

$$= -\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w} + \frac{1}{2}\vec{u}$$

$$= -\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$$

2 . المقارنة مع القطر

$$\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}(-\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})$$

$$\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD'}$$

الجواب النهائي

$$\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD'}$$

البند ب (1)

فسّروا لماذا EF يوازي AB.

1 . المقارنة

$$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

إذن المستقيمان متوازيان.

الجواب النهائي

$$EF \parallel AB$$

البند ب (2)

أثبتوا أن AB يعامد AE.

1 . الضرب العددي

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} &= \vec{u} \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w} \right) \\ &= \frac{1}{2}\vec{u} \cdot \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{u} \cdot \vec{w} = 0\end{aligned}$$

الجواب النهائي

$$AB \perp AE$$

البند ج (1)

احسبوا طول الحرف الجانبي إذا كانت القاعدة مربعاً ضلعه 2 والحجم 16.

1 . إيجاد الارتفاع

$$16 = (2 \cdot 2)h$$

$$4h = 16 \implies h = 4$$

الجواب النهائي

طول الحرف الجانبي 4.

البند ج (2)

احسبوا طول BF.

1 . طول القطر

$$BD' = \sqrt{2^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

2 . نصف القطر

$$BF = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{6} = \sqrt{6}$$

الجواب النهائي

$$BF = \sqrt{6}$$

البند د (1)

احسبوا الزاوية ABF.

1 . الضرب العددي

$$\overrightarrow{BA} = -\vec{u}$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BF} = \frac{1}{2} |\vec{u}|^2 = 2$$

2 . جيب تمام الزاوية

$$\cos \angle ABF = \frac{2}{2\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\angle ABF \approx 65.905157^\circ$$

الجواب النهائي

$$\angle ABF \approx 65.91^\circ$$

البند د (2)

جدوا باقي زوايا الشكل الرباعي AEFB.

1 . الزاويتان القائمتان

$$\angle EAB = 90^\circ, \quad \angle AEF = 90^\circ$$

2 . الزاوية عند F

$$\angle EFB + \angle ABF = 180^\circ$$

$$\angle EFB \approx 114.094843^\circ$$

الجواب النهائي

عند A وعند E: 90° . عند F: نحو 114.09° .

السؤال 2 . استهلاك السجائر قبل دورة وبعدها

2. شارك 9 مدخنين في بحث لفحص تأثير دورة للإقلاع عن التدخين. قيس لكل واحد استهلاكه اليومي للسجائر قبل الدورة (X)، وبعد أسبوع من بدايتها (Y). المعطيات مفصلة في الجدول:

40	30	28	25	22	22	20	15	5	الاستهلاك اليومي قبل الدورة (X)
30	30	24	22	22	20	19	10	3	الاستهلاك اليومي بعد أسبوع (Y)

أ. احسبوا متوسط الاستهلاك اليومي للسجائر للمشارك قبل الدورة، ومتوسطه بعد أسبوع من بدايتها.

ب. ارسموا مخطط تشتت ل Y حسب X؛ كل مربع في الدفتر يمثل سيجارتين في اليوم.

ج. حسب المخطط، اختاروا معامل الارتباط الملائم من الأعداد الآتية، واكتبوه:

$$r = 1 ; r = 0.949 ; r = 0.212 ; r = -0.633$$

معطى الانحرافان المعياريان $S_X = 9.226$ ، $S_Y = 8.26$.

د. جدوا معادلة مستقيم الانحدار للتنبؤ ب Y حسب X.

هـ. يدخن إلعاد 21 سيجارة في اليوم، ويريد المشاركة في الدورة. حسب مستقيم الانحدار، ما هو التنبؤ لاستهلاكه اليومي بعد أسبوع من بداية الدورة؟

البند أ

احسبوا المتوسط قبل الدورة وبعد أسبوع.

1 . متوسط X

$$\bar{X} = \frac{5 + 15 + 20 + 22 + 22 + 25 + 28 + 30 + 40}{9}$$

$$\bar{X} = 207/9 = 23$$

2 . متوسط Y

$$\bar{Y} = \frac{3 + 10 + 19 + 20 + 22 + 22 + 24 + 30 + 30}{9}$$

$$\bar{Y} = 180/9 = 20$$

الجواب النهائي

المتوسط قبل الدورة 23 سيجارة يومياً، وبعد أسبوع 20 سيجارة يومياً.

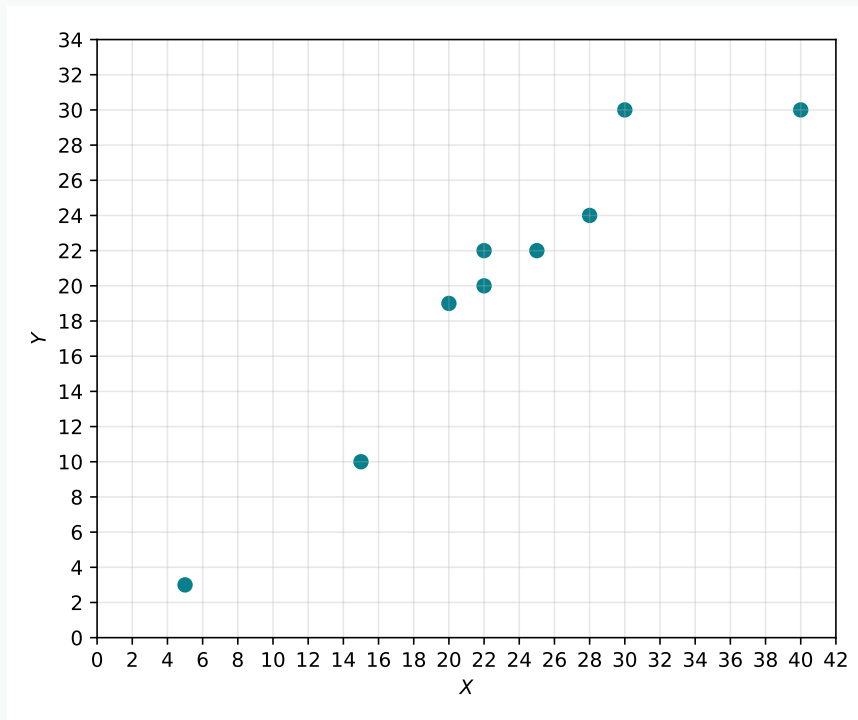
البند ب

ارسموا مخطط تشتت Y حسب X.

1 . تعيين النقاط

(5, 3), (15, 10), (20, 19), (22, 20), (22, 22)

(25, 22), (28, 24), (30, 30), (40, 30)



X: الاستهلاك قبل الدورة، Y: بعد أسبوع، فرق التدريجات وحدتان.

الجواب النهائي

المخطط موضح أعلاه ويحتوي على النقاط التسع.

البند ج

اختراروا معامل الارتباط الملائم.

1 . تفسير الاختيار

النقاط تتجه إلى الأعلى وتقرب من مستقيم، لكنها لا تقع كلها عليه. لذلك نستبعد القيمة السالبة و0.212 و1.

الجواب النهائي

$$r = 0.949$$

البند د

جدوا مستقيم الانحدار للتنبؤ بـ Y حسب X.

1 . حساب الميل

$$m = r \frac{S_Y}{S_X} = 0.949 \frac{8.26}{9.226}$$

$$m \approx 0.8496358118$$

2 . كتابة المستقيم

$$\hat{Y} - \bar{Y} = m(X - \bar{X})$$

$$\hat{Y} - 20 = 0.8496358118(X - 23)$$

$$\hat{Y} \approx 0.849636X + 0.458376$$

الجواب النهائي

$$\hat{Y} \approx 0.849636X + 0.458376$$

البند هـ

تنبؤوا بالاستهلاك اليومي لمشارك يستهلك 21 سيارة قبل الدورة.

1 . التعويض

$$\hat{Y} = 20 + m(21 - 23) = 20 - 2m$$

$$\hat{Y} \approx 18.30072838$$

2 . التفسير

هذه قيمة متوقعة حسب النموذج وليست تحديداً مؤكداً لاستهلاك شخص بعينه.

الجواب النهائي

نحو 18.30 سيارة يومياً بعد أسبوع.

السؤال 3 . كسر أسّي بثلاثة فروع

3. الفصل الثاني - التزايد والتناقص، والتفاضل والتكامل لدوالّ أسّيّة ولوغاريتميّة

$$\text{معطى الدالة } f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2 - 2}$$

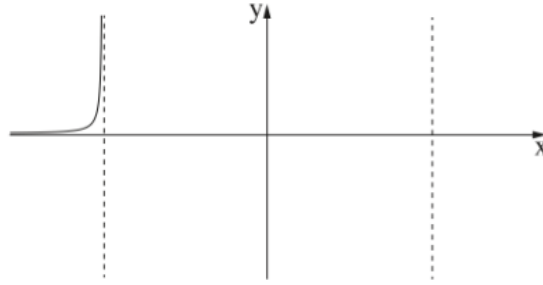
أ. (1) جدوا مجال تعريف الدالة $f(x)$.

(2) جدوا معادلات خطوط التقارب العموديّة على محور x للدالة $f(x)$.

ب. جدوا إحداثيّات نقاط تقاطع الرسم البيانيّ للدالة $f(x)$ مع المحاور، إن وجدت.

ج. جدوا إحداثيّات نقاط تطرّف الدالة $f(x)$ ، وحدّدوا نوعها.

د. أمامكم رسم تقريبيّ جزئيّ للدالة $f(x)$. انسخوه إلى دفتركم، وأكملوا فيه الأجزاء الناقصة من الرسم البيانيّ.



معطى الدالة $g(x) = f(x) + c$ ، حيث c بارامتر.

هـ. جدوا القيمتين الممكنتين لـ c اللتين تكون للدالة $g(x)$ عندهما نقطة تطرّف على المستقيم $y = 3$. علّلوا إجابتكم.

البند أ (1)

جدوا مجال التعريف.

1 . شرط المقام

$$x^2 - 2 \neq 0 \iff x \neq \pm\sqrt{2}$$

الجواب النهائي

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$$

البند أ (2)

جدوا خطوط التقارب العمودية.

1. فحص انعدام المقام

$$e^{2x} > 0 \quad \forall x$$

لذلك كلا صفري المقام يعطي خط تقارب عمودياً.

الجواب النهائي

$$x = -\sqrt{2}, \quad x = \sqrt{2}$$

البند ب

جدوا التقاطعات مع المحورين.

1. محور x

لا يوجد تقاطع مع محور x لأن e^{2x} موجب دائماً.

2. محور y

$$f(0) = 1/(0 - 2) = -1/2$$

الجواب النهائي

$$(0, -1/2)$$

لا يوجد تقاطع مع محور x.

البند ج

جدوا النقاط القصوى ونوعها.

1. قاعدة مشتقة الكسر

مشتقة البسط ضرب المقام، سالب مشتقة المقام ضرب البسط، تقسيم مربع المقام.

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}(x^2 - 2) - 2xe^{2x}}{(x^2 - 2)^2}$$

2 . التحليل

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}(x^2 - x - 2)}{(x^2 - 2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}(x - 2)(x + 1)}{(x^2 - 2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \iff x = -1 \quad \text{or} \quad x = 2$$

3 . إشارات المشتقة

العامل الأسي والمقام المربع موجبان؛ الإشارة تأتي من $(x+1)(x-2)$.

x	$(-\infty, -\sqrt{2})$	$-\sqrt{2}$	$(-\sqrt{2}, -1)$	-1	$(-1, \sqrt{2})$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2}, 2)$	2	$(2, \infty)$
قيمة فحس	-2	-	-5/4	-1	0	-	3/2	2	3
f'(x)	+	×	+	0	-	×	-	0	+
f(x)	تزايد ↗	غير معرفة	تزايد ↗	عظمى	تناقص ↘	غير معرفة	تناقص ↘	صغرى	تزايد ↗

الفترة مرتبة من اليسار إلى اليمين؛ نقاط عدم التعريف ليست نقاطاً قصوى.

$$f'(-2) = 2e^{-4} > 0, \quad f'(-5/4) = \frac{416}{49}e^{-5/2} > 0$$

$$f'(0) = -1 < 0, \quad f'(3/2) = -40e^3 < 0, \quad f'(3) = 8e^6/49 > 0$$

$$f(-1) = -e^{-2}, \quad f(2) = e^4/2$$

الجواب النهائي

$$(-1, -e^{-2})$$

عظمى محلية.

$$(2, e^4/2)$$

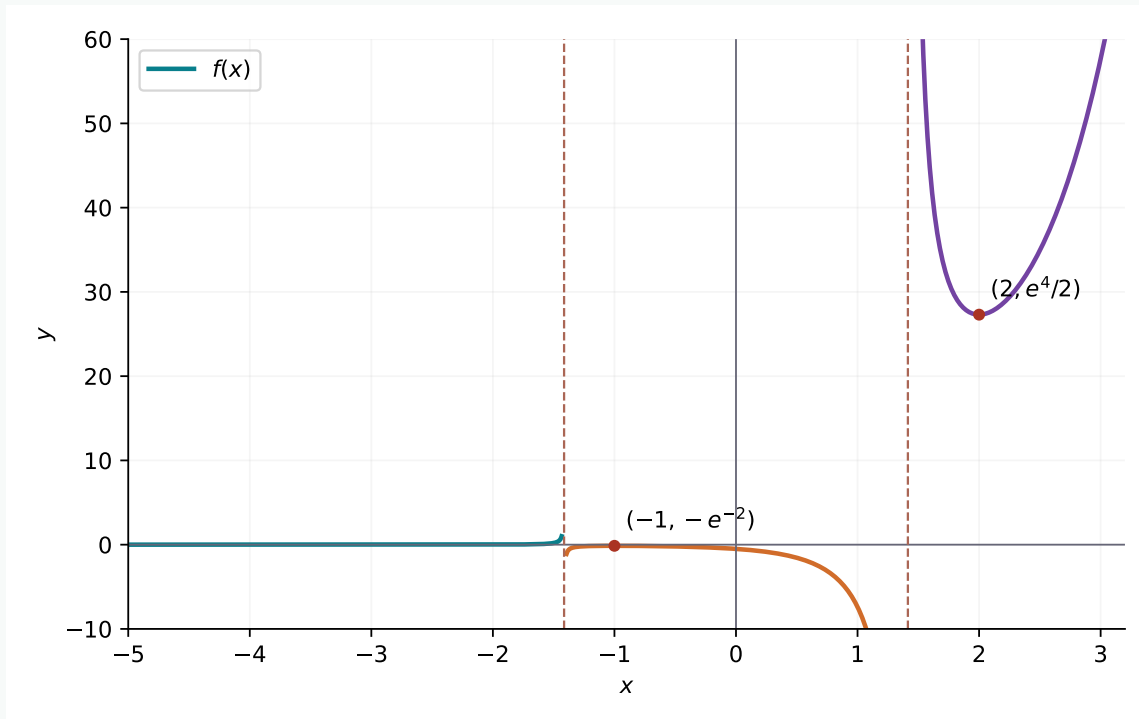
صغرى محلية.

البند د

أكملوا الرسم التقريبي للدالة.

1 . صفات الفروع

الفروع الأيسر موجب متزايد من صفر إلى $+\infty$. الفرع الأوسط سالب، يصعد من $-\infty$ إلى العظمى ثم يعود إلى $-\infty$. الفرع الأيمن موجب، ينخفض من $+\infty$ إلى الصغرى ثم يصعد إلى $+\infty$.



الجواب النهائي

الرسم الكامل موضح أعلاه.

البند هـ

جدوا قيمتي c لكي تقع نقطة قصوى لـ $g=f+c$ على $y=3$.

1 . إزاحة العظمى

$$-e^{-2} + c = 3 \implies c = 3 + e^{-2}$$

2. إزاحة الصغرى

$$e^4/2 + c = 3 \implies c = 3 - e^4/2$$

الجواب النهائي

$$c = 3 + e^{-2} \quad \text{or} \quad c = 3 - e^4/2$$

السؤال 4 . ترييع اللوغريثم والقيمة المطلقة

4. معطى الدالة $f(x) = (\ln x)^2 - a \cdot \ln x + 3$ ، حيث a بارامتر.
- إحدى نقاط تقاطع رسمها البياني مع محور x هي $(e^3, 0)$.
- أ. جدوا a .
- ب. جدوا مجال تعريف الدالة $f(x)$.
- ج. جدوا إحداثيات نقطة التقاطع الأخرى للرسم البياني للدالة $f(x)$ مع محور x .
- د. جدوا إحداثيات نقطة تطرف الدالة $f(x)$ ، وحددوا نوعها.
- هـ. ارسموا رسماً تقريبياً للرسم البياني للدالة $f(x)$.
- و. معطى الدالة $g(x) = |f(x)|$ ، المعرفة في المجال نفسه الذي تُعرّف فيه $f(x)$.
- و. ارسموا رسماً تقريبياً للرسم البياني للدالة $g(x)$.

البند أ

جدوا a إذا كانت $(e^3, 0)$ على الرسم.

1 . التعويض

$$0 = 3^2 - a \cdot 3 + 3$$

$$0 = 12 - 3a \implies a = 4$$

الجواب النهائي

$$a = 4$$

البند ب

جدوا مجال f عند $a=4$.

1 . المجال

$$x > 0$$

الجواب النهائي

$$D_f = (0, \infty)$$

البند جـ

جدوا التقاطع الآخر مع محور x.

1 . التحليل والحل

$$(\ln x)^2 - 4 \ln x + 3 = 0$$

$$(\ln x - 1)(\ln x - 3) = 0$$

$$x = e \quad \text{or} \quad x = e^3$$

الجواب النهائي

$$(e, 0)$$

هو التقاطع الآخر.

البند د

جدوا النقطة القصوى ونوعها.

1 . المشتقة وصفرها

$$f'(x) = \frac{2 \ln x - 4}{x} = \frac{2(\ln x - 2)}{x}$$

$$f'(x) = 0 \iff x = e^2$$

2 . الجدول والقيمة

x	$(0, e^2)$	e^2	(e^2, ∞)
قيمة فحص	1	e^2	e^3
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	تناقص لا	صغرى	تزايد ↗

الفترة مرتبة من اليسار إلى اليمين؛ نقاط عدم التعريف ليست نقاطاً قصوى.

$$f'(1) = -4 < 0, \quad f'(e^3) = 2e^{-3} > 0$$

$$f(e^2) = 4 - 8 + 3 = -1$$

الجواب النهائي

$$(e^2, -1)$$

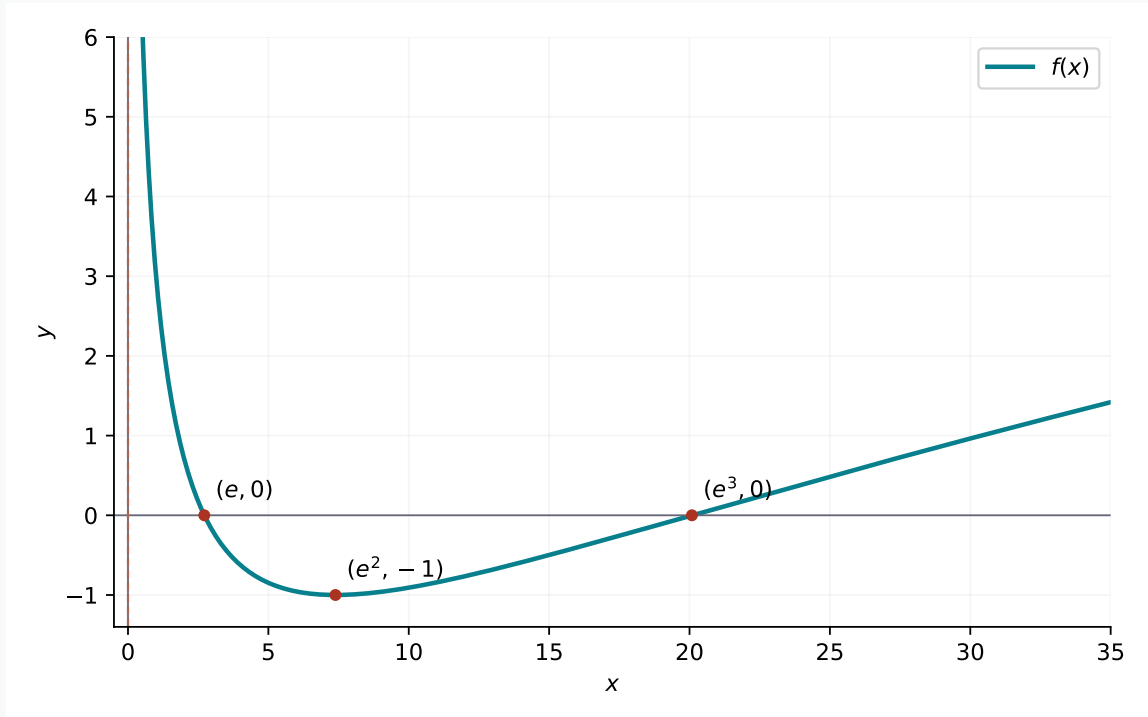
نقطة صغرى مطلقة.

البند هـ

ارسموا رسماً تقريبياً للدالة f .

1 . النهايات

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$$



الجواب النهائي

الرسم موضح أعلاه، و $x=0$ خط تقارب عمودي.

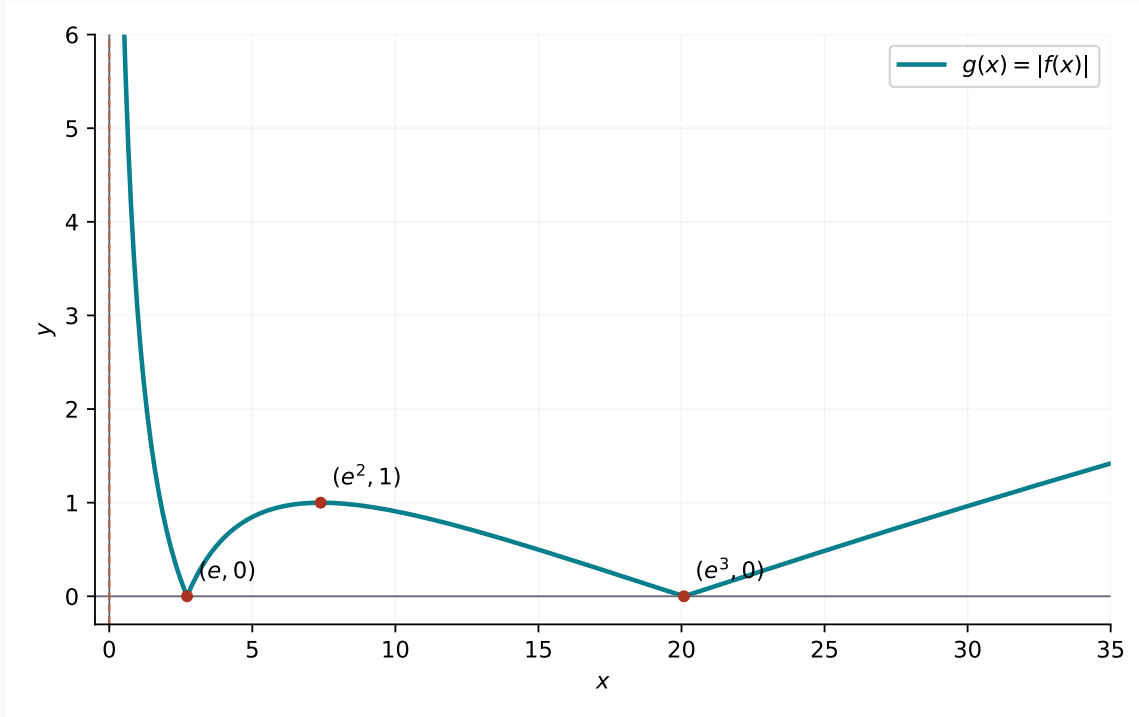
البند و

ارسموا $|g|=f$.

1 . تحديد الجزء المنعكس

$$f(x) < 0 \iff e < x < e^3$$

يبقى الرسم كما هو خارج هذه الفترة، وينعكس الجزء بين e و e^3 إلى الأعلى. الصغرى $(e^2, -1)$ تصبح عظمى محلية $(e^2, 1)$ ، والجذران يصبحان نقطتي صغرى.

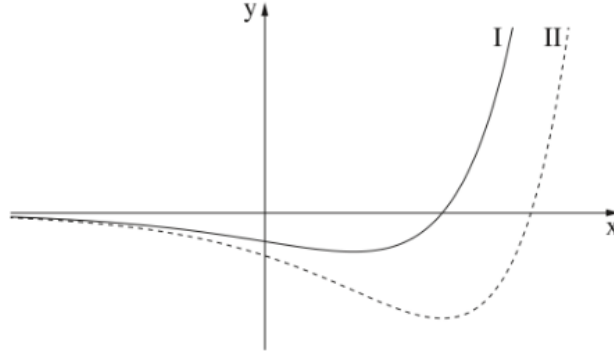


الجواب النهائي

صغريان عند $(e, 0)$ و $(e^3, 0)$ ، وعظمى محلية عند $(e^2, 1)$.

السؤال 5 . المشتقة وانعكاسها والمساحة بينهما

5. يصف الرسم منحنين، I و II. أحدهما هو الرسم البياني للدالة $f(x)$ ، والآخر هو الرسم البياني لدالة المشتقة $f'(x)$. يقطع كل رسم بياني محور x في نقطة واحدة فقط.



- أي رسم، I أم II، يلائم الرسم البياني لدالة المشتقة $f'(x)$ ؟ عللوا.
معطى: $f(x) = (x - 3) \cdot e^x$.
- جدوا مجال تعريف الدالة $f(x)$.
- جدوا إحداثيات نقاط تقاطع الرسم البياني للدالة $f(x)$ مع المحاور.
- جدوا مجالات تصاعد الدالة $f(x)$ وتنقصها.
- معطى الدالة $g(x) = -f'(x)$. ارسموا رسماً تقريبياً للرسم البياني للدالة $g(x)$.
- جدوا المساحة المحصورة بين الرسم البياني لدالة المشتقة $f'(x)$ والرسم البياني للدالة $g(x)$ ومحور y .

البند أ

أي الرسمين I و II يصف f' ؟ عللوا.

1 . المطابقة

الرسم I يقطع محور x عند إحداثي الصغرى في الرسم II، وهو سالب قبل ذلك وموجب بعده؛ لذلك I يصف المشتقة.

الجواب النهائي

الرسم I يصف f' .

البند ب

جدوا مجال $f(x)=(x-3)e^x$.

1 . المجال

$$D_f = \mathbb{R}$$

الجواب النهائي

$$D_f = \mathbb{R}$$

البند ج

جدوا التقاطعات مع المحورين.

1 . محور x

$$(x-3)e^x = 0 \iff x = 3$$

2 . محور y

$$f(0) = -3$$

الجواب النهائي

$$(3, 0), \quad (0, -3)$$

البند د

جدوا مجالات التصادد والتناقص.

1 . المشتقة

$$f'(x) = e^x + (x-3)e^x = e^x(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \iff x = 2$$

2. الإشارة

x	$(-\infty, 2)$	2	$(2, \infty)$
قيمة فحص	0	2	3
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	تناقص ↘	صغرى	تزايد ↗

الفترة مرتبة من اليسار إلى اليمين؛ نقاط عدم التعريف ليست نقاطاً قصوى.

$$f'(0) = -2 < 0, \quad f'(3) = e^3 > 0$$

الجواب النهائي

تناقص في $(-\infty, 2)$ ، وتساعد في $(2, \infty)$.

البند هـ

ارسموا $g = -f$.

1. الخصائص الأساسية

$$g(x) = (2 - x)e^x$$

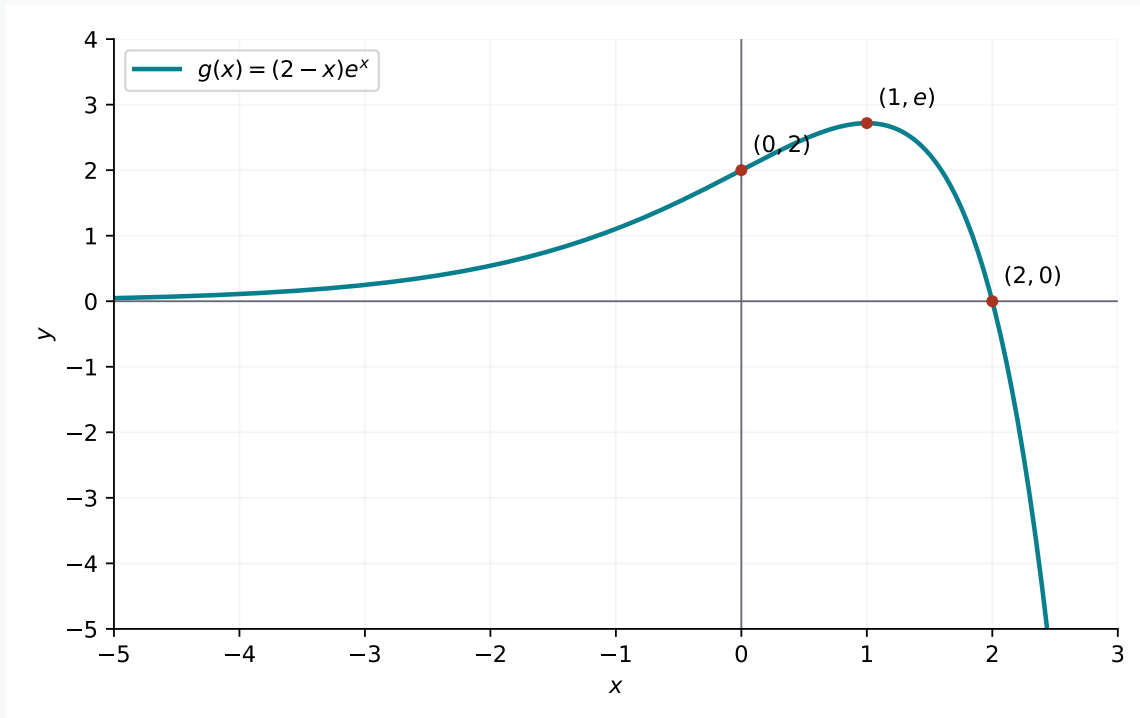
$$g'(x) = (1 - x)e^x$$

$$g'(x) = 0 \iff x = 1$$

$$g(1) = e, \quad g(0) = 2, \quad g(2) = 0$$

2 . الرسم

g متزايدة قبل 1 ومتناقصة بعده، ولها عظمى عند $(e, 1)$.



الجواب النهائي
الرسم موضح أعلاه.

البند و

احسبوا المساحة بين f' و g ومحور y .

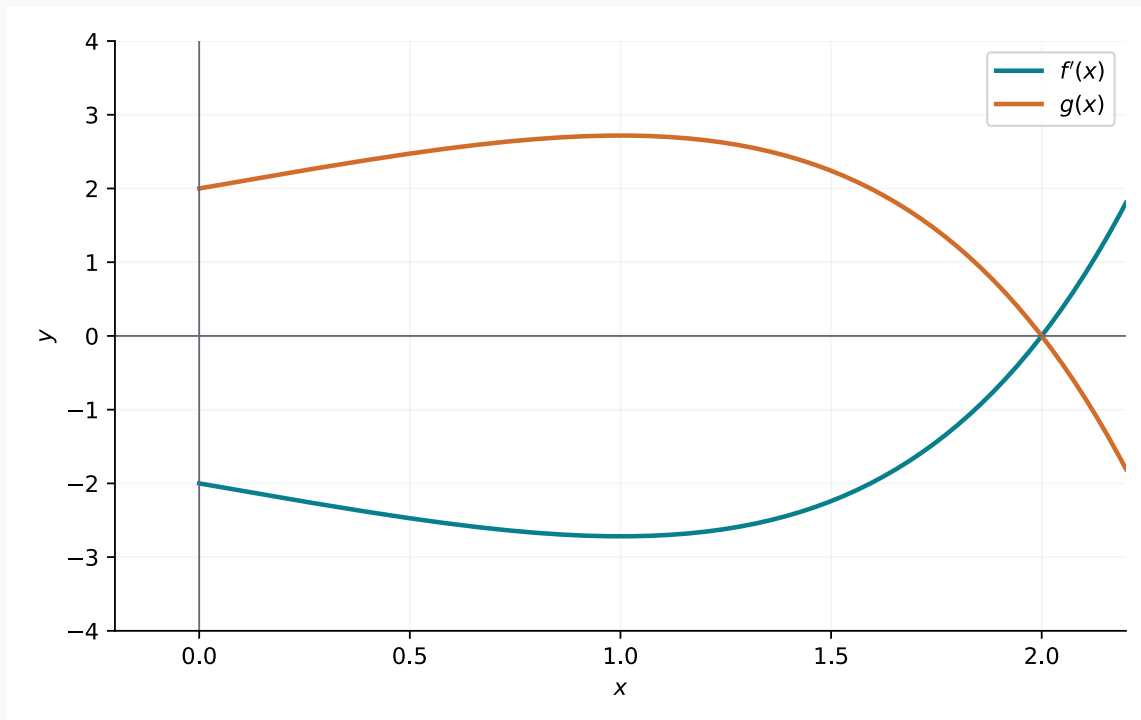
1 . حدود المساحة

$$f'(x) = -f'(x) \iff f'(x) = 0 \iff x = 2$$

$$S = \int_0^2 [g(x) - f'(x)] dx = -2 \int_0^2 f'(x) dx$$

$$S = -2[f(2) - f(0)]$$

$$S = -2[-e^2 - (-3)] = 2e^2 - 6$$



الجواب النهائي

$$S = 2e^2 - 6$$

وحدة مربعة.