

حلول امتحان البجروت 35471

4 وحدات . صيف 2026 . الموعد ب

ثمانية أسئلة، مع انتقالات حسابية مفصلة وجداول إشارة ومراجعة للرموز والمصطلحات.

نصوص الأسئلة مصوّرة من النموذج العربي. الحلول التعليمية أصلية وليست حلولاً رسمية صادرة عن وزارة التربية والتعليم.

يُمكن استعمال هذا الملف مع النسخة التفاعلية، أو قراءته وطباعته مستقلاً.

حقوق النشر والطباعة | mathbagrut.com

© 2026 mathbagrut.com — حقوق الشرح والحلول وتصميم الملف محفوظة.

يُسمح بتنزيل نسخة وطباعتها للاستعمال التعليمي الشخصي أو الصفي مع إبقاء اسم الموقع ظاهراً. تُمنع إعادة النشر أو البيع دون إذن خطّي. حقوق نصوص الأسئلة ورسوم الامتحان تبقى لأصحابها.

السؤال 1 • التوزيع الطبيعي والخطوات اليومية

نص السؤال من امتحان البجروت العربي:

الأسئلة

أجبوا عن خمسة من الأسئلة 1-8. (لكل سؤال – 22 درجة .)
انتبهوا: إذا أجبتكم عن أكثر من خمسة أسئلة، تُفحص فقط الإجابات الخمس الأولى التي في دفتركم.

الفصل الأول – الإحصاء والاحتمال

1. في دولة معينة، أُجريَ بحث فطري في مجال الصحة .
فُحص في البحث عدد الخطوات اليومية التي يمشيها كل واحد من المشاركين .
وُجد أن عدد الخطوات اليومية يتوزع طبيعيًا والانحراف المعياري هو 800 .
وُجد أن 37.5% من المشاركين في البحث يمشون أقل من 6,944 خطوة في اليوم .
أ. جدوا معدل عدد الخطوات اليومية للمشاركين في البحث .
توصي وزارة الصحة بالمشي أكثر من 8,400 خطوة في اليوم .
ب. جدوا النسبة المئوية للمشاركين في البحث، الذين يُحققون هذه التوصية .
وُجد أن 14,722 من المشاركين في البحث يمشون أكثر من 7,200 خطوة في اليوم وأقل من 8,400 خطوة في اليوم .
ج. حسب جدول التوزيع الطبيعي، ما هو العدد الكلي للأشخاص الذين شاركوا في البحث؟
فُحص في البحث أيضًا عدد ساعات النوم في اليوم لكل واحد من المشاركين في البحث .
وُجد أيضًا أن عدد ساعات النوم في اليوم يتوزع طبيعيًا .
معدل عدد ساعات النوم في اليوم للمشاركين في البحث هو 7 ساعات .
شاركت سارة في البحث . عدد ساعات نوم سارة في اليوم هو 9.28 ، وعدد خطواتها اليومية هو 8,416 .
العلامة المعيارية لعدد خطوات سارة اليومية مساوية للعلامة المعيارية لعدد ساعات نومها في اليوم .
د. جدوا الانحراف المعياري لعدد ساعات النوم في اليوم للمشاركين في البحث .

أ. المعدل

المساحة الواقعة يسار 6,944 هي 0.3750. نقرأ العلامة المعيارية الموافقة من جدول التوزيع الطبيعي، ثم نعوض في دستور العلامة المعيارية.

$$P(X < 6,944) = 0.3750 \implies z = -0.32$$

$$z = \frac{x - \bar{x}}{S} \implies -0.32 = \frac{6,944 - \bar{x}}{800}$$

$$-0.32 \cdot 800 = 6,944 - \bar{x} \implies -256 = 6,944 - \bar{x}$$

$$\bar{x} = 6,944 + 256 = 7,200$$

الجواب النهائي
معدل عدد الخطوات اليومية

$$\bar{x} = 7,200$$

ب . فوق 8,400

نحوّل 8,400 إلى علامة معيارية، ثم نطرح قيمة الجدول التراكمية من 1 لأن المطلوب أكبر من هذه القيمة.

$$z = \frac{8,400 - 7,200}{800} = 1.5$$

$$P(X > 8,400) = P(Z > 1.5) = 1 - P(Z < 1.5)$$

$$P(X > 8,400) = 1 - 0.9330 = 0.0670 = 6.7\%$$

الجواب النهائي
النسبة المطلوبة

$$P(X > 8,400) = 6.7\%$$

ج . عدد المشاركين

عدد الأشخاص المعطى يمثل من تقع خطواتهم بين المعدّل و8,400. نحسب احتمال هذا المجال أولاً.

$$P(7,200 < X < 8,400) = P(0 < Z < 1.5)$$

$$P(0 < Z < 1.5) = 0.9330 - 0.5000 = 0.4330$$

$$0.4330 N = 14,722 \implies N = \frac{14,722}{0.4330} = 34,000$$

الجواب النهائي
عدد المشاركين في البحث

$$N = 34,000$$

د . ساعات نوم سارة

تساوى العلامتان المعياريتان لسارة في المتغيّرين. نحسب علامتها من عدد الخطوات ثم نجد انحراف ساعات النوم.

$$z_{\text{steps}} = \frac{8,416 - 7,200}{800} = 1.52$$

$$z_{\text{sleep}} = \frac{9.28 - 7}{S_{\text{sleep}}} = 1.52$$

$$1.52 S_{\text{sleep}} = 2.28 \implies S_{\text{sleep}} = 1.5$$

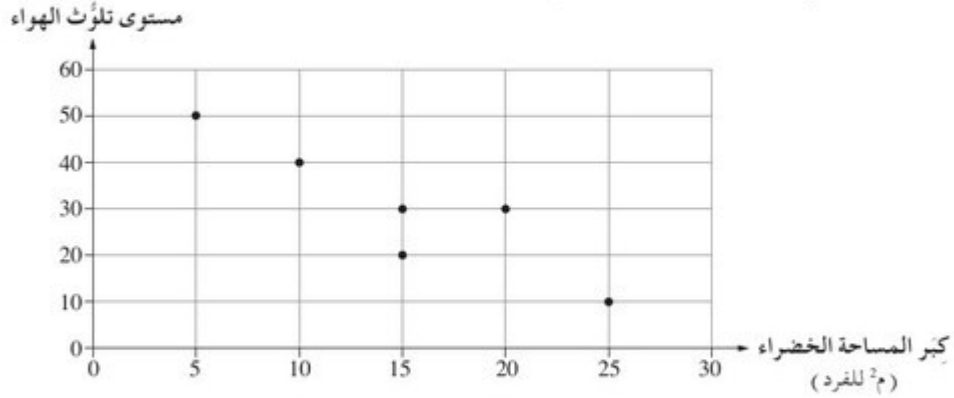
الجواب النهائي
الانحراف المعياري لساعات النوم

$$S = 1.5$$

السؤال 2 • مخطّط التشبّت ومستقيم الانحدار

نص السؤال من امتحان البجروت العربي:

2. فحص باحث للبيئة في 6 مدن مختلفة العلاقة بين كِبَر المساحة الخضراء (المتنزهات والحدائق) للفرد في المدينة (المتغير x) وبين مستوى تلوث الهواء في المدينة (المتغير y).
حدّد الباحث مستوى تلوث الهواء في كلّ مدينة حسب مؤشر جودة الهواء AQI (مؤشر عددي لكميّة الملوثات في الهواء).
المعطيات معروضة في مخطّط التشبّت الذي أمامكم.



- نرمز بـ r إلى معامل الارتباط بين x و y .
- أ. أمامكم أربعة أقوال IV-I. حدّدوا أيّ قول هو الصحيح. علّلوا تحديدكم.
- I. $0 < r < 1$
- II. $r = -1$
- III. $-1 < r < 0$
- IV. لا يمكن تحديد مجال قيم r .
- ب. (1) احسبوا معدّل كِبَر المساحة الخضراء للفرد في 6 المدن.
(2) احسبوا معدّل مستويات تلوث الهواء في 6 المدن.
- معطى أنّ معادلة مستقيم الانحدار للتنبؤ بـ y حسب x هي: $y = -1.8x + b$.
- ج. (1) جدّوا قيمة b .
(2) حسب مستقيم الانحدار، ما هو التنبؤ بمستوى تلوث الهواء في المدينة التي كِبَر مساحتها الخضراء هو 18 م² للفرد؟
- د. احسبوا الانحراف المعياري لكِبَر المساحة الخضراء في 6 المدن.
وجّد الباحث أنّ الانحراف المعياري لمستوى تلوث الهواء هو $S_y = \sqrt{\frac{500}{3}}$.
- ه. استعينوا بمعادلة مستقيم الانحدار للتنبؤ بـ y حسب x ، وجدّوا معامل الارتباط r .
- اكتشف الباحث أنّه كان خلل في جهاز القياس، وأنّ مستوى تلوث الهواء في كلّ واحدة من 6 المدن كان في الواقع أعلى بـ 4 من مستوى التلوث الذي قيس. صحّح الباحث المعطيات وفقاً لذلك.
- و. (1) هل كِبَر مُبَلّ مستقيم الانحدار للتنبؤ بـ y حسب x بعد تصحيح المعطيات أم صَغُر أم لم يتغيّر؟ علّلوا إجابتكم.
(2) اكتبوا معادلة مستقيم الانحدار للتنبؤ بـ y حسب x بعد تصحيح معطيات مستوى تلوث الهواء.

أ. إشارة الارتباط

اتجاه سخابة النقاط هابط، ولذلك الارتباط سالب. النقاط لا تقع على مستقيم واحد، لذلك لا يساوي معامل الارتباط -1.

$$-1 < r < 0$$

الجواب النهائي
الاختيار الصحيح: ارتباط سالب غير تام

$$-1 < r < 0 \quad \text{III}$$

ب(1، 2) · المعدّلات

نقرأ الأزواج الستة من مخطّط التشتت. التكرار عند $x=15$ مرتان، ونحسب معدّل كل متغيّر على حدة.

$$\bar{x} = \frac{5 + 10 + 15 + 15 + 20 + 25}{6} = \frac{90}{6} = 15$$

$$\bar{y} = \frac{50 + 40 + 30 + 20 + 30 + 10}{6} = \frac{180}{6} = 30$$

الجواب النهائي
معدّلات المتغيّرين

$$\bar{x} = 15, \quad \bar{y} = 30$$

ج(1، 2) · الانحدار والتنبؤ

يتمّ مستقيم الانحدار بالنقطة ذات إحداثي المعدّلين. نجد b أولاً، ثم نعوض المساحة المطلوبة.

$$\bar{y} = m\bar{x} + b \implies 30 = -1.8 \cdot 15 + b$$

$$30 = -27 + b \implies b = 30 + 27 = 57$$

$$y = -1.8x + 57$$

$$x = 18 : \quad y = -1.8 \cdot 18 + 57 = -32.4 + 57 = 24.6$$

الجواب النهائي
الجزء المقطوع والقيمة المتوقعة

$$b = 57, \quad y(18) = 24.6$$

د · انحراف x

نستعمل دستور الانحراف المعياري في لائحة القوانين مع $N=6$. نأخذ الفروق عن المعدّل 15 ثم نربّعها.

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})^2}{6}}$$

$$S_x = \sqrt{\frac{(-10)^2 + (-5)^2 + 0^2 + 0^2 + 5^2 + 10^2}{6}}$$

$$S_x = \sqrt{\frac{250}{6}} = \sqrt{\frac{125}{3}} = \frac{5\sqrt{15}}{3}$$

الجواب النهائي
الانحراف المعياري للمساحة الخضراء

$$S_x = \frac{5\sqrt{15}}{3}$$

هـ . معامل الارتباط

نطبق علاقة ميل مستقيم الانحدار بمعامل الارتباط والانحرافين المعياريين.

$$m = r \frac{S_y}{S_x} \implies r = m \frac{S_x}{S_y}$$

$$r = -1.8 \cdot \frac{\sqrt{125/3}}{\sqrt{500/3}} = -1.8 \cdot \frac{1}{2} = -0.9$$

الجواب النهائي
معامل الارتباط

$$r = -0.9$$

و(1، 2) . تصحيح القياس

عندما نضيف 4 إلى جميع قيم y ، تزيد التنبؤات بمقدار 4 لكل x . يبقى الميل كما هو ويزداد الجزء المقطوع.

$$y_{\text{new}} = y + 4 = (-1.8x + 57) + 4 = -1.8x + 61$$

الجواب النهائي
الميل والمعادلة بعد تصحيح القياس

$$m = -1.8, \quad y = -1.8x + 61$$

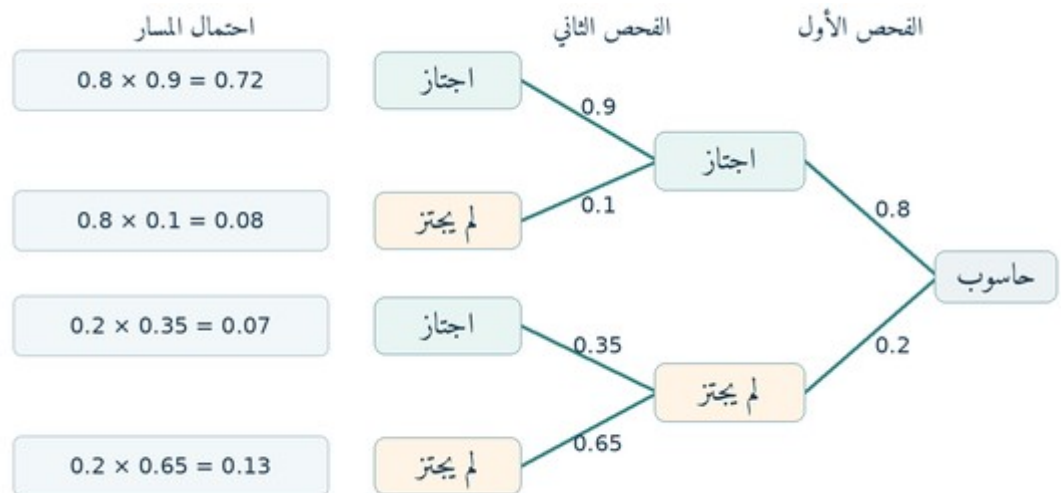
السؤال 3 • فحص جودة الحواسيب والاحتمال الشرطي

نص السؤال من امتحان البجروت العربي:

3. في مصنع معيّن يُنتجون حواسيب .
فُحصت جميع الحواسيب التي أُنتجت في دورة إنتاج معيّنة في فحصي جودة للتأكد من أنّها صالحة .
في الفحص الأول، وجدوا أنّ 80% من الحواسيب هي صالحة .
إذا وُجد حاسوب صالحاً في الفحص الأول، فإنّ الاحتمال بأن يجده صالِحاً في الفحص الثاني هو 0.9 .
إذا وُجد حاسوب ليس صالحاً في الفحص الأول، فإنّ الاحتمال بأن يجده صالِحاً في الفحص الثاني هو 0.35 .
اختاروا بشكل عشوائي حاسوباً أُنتج في دورة الإنتاج .
أ. ما هو الاحتمال بأنهم وجدوا الحاسوب صالحاً في أحد الفحصين بالضغط ؟
ب. ما هو الاحتمال بأنهم وجدوا الحاسوب صالحاً في أحد الفحصين على الأقل ؟
فقط الحاسوب الذي يجده صالِحاً في الفحصين يُرسل للبيع .
اختاروا بشكل عشوائي حاسوباً أُنتج في دورة الإنتاج .
جـ. معلوم أنّ الحاسوب الذي اختير وجدوه صالِحاً في أحد الفحصين على الأقل . ما هو الاحتمال بأنّ هذا الحاسوب أُرسل للبيع ؟
معطى أنّهم أنتجوا 250 حاسوباً في دورة الإنتاج هذه .
د. جدوا عدد الحواسيب التي أُرسلت للبيع في دورة الإنتاج هذه .
من بين الحواسيب التي أنتجوها في دورة الإنتاج هذه، يختارون بشكل عشوائي حاسوبين، الواحد تلو الآخر (إخراج بدون إعادة) .
هـ. ما هو الاحتمال بأنّ حاسوباً واحداً بالضغط أُرسل للبيع ؟

أ. فحص صالح واحد

نرسم شجرة للمرحلتين، ونضع احتمالاً شرطياً على كل فرع من الفحص الثاني. نرسم A إلى اجتياز الفحص الأول، و B إلى اجتياز الثاني. الحدث المطلوب يمثله مساران منفصلان في الشجرة.



$$P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B) \\ = 0.8(1 - 0.9) + (1 - 0.8) \cdot 0.35$$

$$= 0.8 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.35 = 0.08 + 0.07 = 0.15$$

الجواب النهائي
احتمال اجتياز فحص واحد بالضبط

$$P = 0.15$$

ب . فحص صالح واحد على الأقل

في الشجرة نجد أن احتمال مسار عدم اجتياز الفحصين هو حاصل ضرب احتمالي فرعيه. هذا هو متمم حدث اجتياز فحص واحد على الأقل.

$$P(A^c \cap B^c) = (1 - 0.8)(1 - 0.35) = 0.2 \cdot 0.65 = 0.13$$

$$P(A \cup B) = 1 - P(A^c \cap B^c) = 1 - 0.13 = 0.87$$

الجواب النهائي
احتمال اجتياز فحص واحد على الأقل

$$P = 0.87$$

ج . أرسل للبيع

من الشجرة، يمثل المسار الذي ينجح في الفحصين حدث الإرسال للبيع. نرسم له $C = A \cap B$. المطلوب احتمال هذا المسار بشرط اجتياز فحص واحد على الأقل؛ نطبق دستور الاحتمال الشرطي.

$$P(C) = P(A \cap B) = 0.8 \cdot 0.9 = 0.72$$

$$P(C | A \cup B) = \frac{P(C \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)}$$

$$P(C | A \cup B) = \frac{P(C)}{0.87} = \frac{0.72}{0.87} = \frac{24}{29} \approx 0.8276$$

الجواب النهائي
احتمال الإرسال للبيع عند معرفة اجتياز فحص واحد على الأقل

$$P = \frac{72}{87} = \frac{24}{29} \approx 0.8276$$

د . العدد المرسل

نضرب عدد الحواسيب في احتمال اجتياز الفحصين، ثم نطرح من المجموع.

$$N_{\text{sale}} = 250 \cdot 0.72 = 180$$

$$N_{\text{other}} = 250 - 180 = 70$$

الجواب النهائي
عدد الحواسيب المرسلّة للبيع

$$N = 180$$

هـ . سحب اثنين بدون إعادة

السحب دون إعادة؛ نعدّ الترتيبين الممكنين ونجمعهما. يتغيّر المقام في السحب الثاني إلى 249.

$$P = \frac{180}{250} \cdot \frac{70}{249} + \frac{70}{250} \cdot \frac{180}{249}$$
$$P = \frac{25,200}{62,250} = \frac{168}{415} \approx 0.4048$$

الجواب النهائي

احتمال أن يكون حاسوب واحد بالضبط من الاثنين المرسلين للبيع

$$P = \frac{168}{415} \approx 0.4048$$

ب . نقطة D

نصف القطر MA يعامد المماس عند A. نستعمل حاصل ضرب الميلين، ثم نعوض $x=0$ لنجد D.

$$m_{MA} = \frac{3}{4}, \quad m_{MA}m_{AD} = -1 \implies m_{AD} = -\frac{4}{3}$$

$$y - 6 = -\frac{4}{3}(x + 16)$$

$$x = 0 : \quad y = 6 - \frac{64}{3} = -\frac{46}{3}$$

$$D = \left(0, -\frac{46}{3}\right)$$

الجواب النهائي
إحداثيات نقطة التقاطع

$$D = \left(0, -\frac{46}{3}\right)$$

ج . تساوي BD و CD

لأن AC قطر و M نقطة منتصفه، نجد C بدستور المنتصف. ثم نقارن طولي القطعتين باستعمال دستور البعد.

$$-24 = \frac{-16 + x_C}{2}, \quad 0 = \frac{6 + y_C}{2}$$

$$x_C = -32, \quad y_C = -6 \implies C = (-32, -6)$$

$$BD = \left|18 - \left(-\frac{46}{3}\right)\right| = 18 + \frac{46}{3} = \frac{100}{3}$$

$$CD = \sqrt{(0 + 32)^2 + \left(-\frac{46}{3} + 6\right)^2}$$

$$CD = \sqrt{32^2 + \left(-\frac{28}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{10,000}{9}} = \frac{100}{3}$$

الجواب النهائي
الطولان متساويان

$$BD = CD = \frac{100}{3}$$

د . الزاوية ABD

القطعة BD رأسية، والمركبة الرأسية للقطعة BA طولها 12؛ لذلك نستعمل جيب التمام في المثلث القائم.

$$BA = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20$$

$$\cos \angle ABD = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

$$\angle ABD = \cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) \approx 53.13^\circ$$

الجواب النهائي
قياس الزاوية

$$\angle ABD \approx 53.13^\circ$$

هـ . طول CK

نحسب مساحة المثلث MCD، ثم نستعمل نسبة المساحتين؛ للمثلثين MCK وMCD الارتفاع نفسه إلى المستقيم CD.

$$S_{MCD} = S_{BCD} - S_{BMD} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot (32 - 24)$$

$$S_{MCD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{100}{3} \cdot 8 = \frac{400}{3}$$

$$\frac{S_{MCK}}{S_{MCD}} = \frac{CK}{CD} \implies \frac{90}{400/3} = \frac{CK}{100/3}$$

$$CK = \frac{90}{400/3} \cdot \frac{100}{3} = 22.5$$

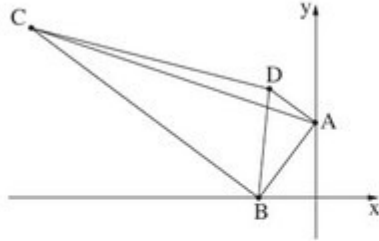
الجواب النهائي
طول القطعة المطلوبة

$$CK = 22.5$$

السؤال 5 • شبه منحرف قائم الزاوية وتشابه

نص السؤال من امتحان البجروت العربي:

5. في الرسم الذي أمامكم شبه المنحرف القائم الزاوية $ABCD$ ($\angle ABC = 90^\circ$ ، $AD \parallel BC$) .
- الرأس B يقع على الجزء السالب للمحور x ،
- معطى أن: $A(0, 4)$ ، طول الضلع AB هو 5 .
- أ. جدوا إحداثيات الرأس B .
- ب. جدوا معادلة الضلع BC .
- معطى أن معادلة القطر AC هي $y = -\frac{1}{3}x + 4$.
- ج. جدوا طول الضلع BC .
- النقطة M هي نقطة تقاطع قطري شبه المنحرف .
- د. برهنوا أن $\triangle DMA \sim \triangle BMC$.
- معطى أن طول القطعة AD هو 3 .
- هـ. جدوا بكم ضعفاً مساحة المثلث BMC هي أكبر من مساحة المثلث DMA .



أ • إحداثيات B

نرمز $B=(b,0)$. باستعمال دستور البعد و $AB=5$ نحصل على قيمتين، ونختار السالبة لأن B في الجزء السالب من محور x .

$$AB = \sqrt{(b-0)^2 + (0-4)^2} = 5$$

$$b^2 + 16 = 25 \implies b = \pm 3$$

$$b < 0 \implies B = (-3, 0)$$

الجواب النهائي
إحداثيات النقطة

$$B = (-3, 0)$$

ب • معادلة BC

بما أن الزاوية ABC قائمة، فإن المستقيم BC يعامد AB . نحسب الميل ثم نستخدم معادلة مستقيم يمر بنقطة وميله معلوم.

$$m_{AB} = \frac{4-0}{0-(-3)} = \frac{4}{3}$$

$$m_{AB}m_{BC} = -1 \implies m_{BC} = -\frac{3}{4}$$

$$y-0 = -\frac{3}{4}(x+3) \implies y = -\frac{3}{4}x - \frac{9}{4}$$

الجواب النهائي معادلة المستقيم

$$y = -\frac{3}{4}x - \frac{9}{4}$$

ج . طول BC

تقع C على المستقيمين AC و BC. نحل معادلتيهما، ثم نحسب BC بدستور البعد.

$$-\frac{3}{4}x - \frac{9}{4} = -\frac{1}{3}x + 4$$

$$-9x - 27 = -4x + 48 \implies x = -15$$

$$y = -\frac{1}{3}(-15) + 4 = 9 \implies C = (-15, 9)$$

$$BC = \sqrt{(-15 - (-3))^2 + (9 - 0)^2}$$

$$BC = \sqrt{(-12)^2 + 9^2} = \sqrt{144 + 81} = \sqrt{225} = 15$$

الجواب النهائي طول الضلع

$$BC = 15$$

د . إثبات التشابه

النقاط A و M و C على استقامة واحدة، وكذلك B و M و D. عند M زاويتان متقابلتان بالرأس. وبسبب $AD \parallel BC$ نحصل على زاويتين متبادلتين داخلياً يقطعهما المستقيم AC؛ لذا يتحقق معيار زاوية-زاوية.

$$\angle DMA = \angle BMC$$

$$\angle DAM = \angle BCM$$

$$\triangle DMA \sim \triangle BMC$$

الجواب النهائي المثلثان متشابهان بمعيار زاوية-زاوية

$$\triangle DMA \sim \triangle BMC$$

هـ . نسبة المساحتين

نسبة مساحتي مثلثين متشابهين تساوي مربع نسبة ضلعين متناظرين. نراعي ترتيب المثلثين المطلوب.

$$\frac{BC}{AD} = \frac{15}{3} = 5$$

$$\frac{S_{BMC}}{S_{DMA}} = \left(\frac{BC}{AD}\right)^2 = 25$$

الجواب النهائي
نسبة المساحتين بالترتيب المطلوب

$$\frac{S_{BMC}}{S_{DMA}} = 25$$

السؤال 6 • بحث الدالة الكسرية والإزاحة

نص السؤال من امتحان البجروت العربي:

الفصل الثالث - حساب التفاضل والتكامل للبولينومات
وللدوال النسبية وللدوال الجذر

6. معطاة الدالة $f(x) = \frac{4x^2}{x^2 - 9} + a$ ،
a هو بارامتر.

أ. جدوا مجال تعريف الدالة $f(x)$.

ب. برهنوا أن الدالة $f(x)$ هي زوجية .

معطى أن الرسم البياني للدالة $f(x)$ يقطع المحور x في النقطة التي فيها $x = \sqrt{3}$.
ج. جدوا قيمة a .

عوضوا $a = 2$ في الدالة $f(x)$ ، وأجيبوا عن البنود "د" و "هـ" .

د. (1) جدوا إحداثيات نقاط تقاطع الرسم البياني للدالة $f(x)$ مع المحورين .

(2) جدوا إحداثيات النقطة القصوى للدالة $f(x)$ ، وحددوا نوع هذه النقطة .

(3) جدوا مجالات تصاعد وتنازل الدالة $f(x)$.

(4) جدوا معادلات خطوط التقارب المعامدة للمحورين، للدالة $f(x)$.

هـ. ارسموا رسماً بيانياً تقريبياً للدالة $f(x)$.

معطاة الدالة $g(x) = f(x - 7)$.

و. (1) جدوا معادلات خطوط التقارب المعامدة للمحورين، للدالة $g(x)$.

(2) هل الدالة $g(x)$ هي زوجية؟ عللوا إجابتكم .

أ، ب • المجال والزوجية

أ. المقام لا يجوز أن يساوي صفراً. ب. نتحقق من تماثل مجال التعريف ثم نعوض $-x$ في الدالة.

$$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3) \neq 0 \implies x \neq -3, x \neq 3$$

$$f(-x) = \frac{4(-x)^2}{(-x)^2 - 9} + a = \frac{4x^2}{x^2 - 9} + a = f(x)$$

الجواب النهائي

مجال التعريف والدالة زوجية لكل قيمة للبارامتر

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$$

$$f(-x) = f(x)$$

ج . إيجاد a

النقطة $(3,0)$ تقع على الرسم، لذلك قيمتها في الدالة تساوي صفراً. نعوض إحداثيها.

$$f(\sqrt{3}) = 0 \implies \frac{4(\sqrt{3})^2}{(\sqrt{3})^2 - 9} + a = 0$$

$$\frac{12}{-6} + a = 0 \implies a = 2$$

الجواب النهائي
قيمة البارامتر

$$a = 2$$

د(1) . التقاطعات

للتقاطع مع محور x نضع $f(x)=0$ ؛ وللتقاطع مع محور y نضع $x=0$. نتحقق من أن الحلول في المجال.

$$0 = \frac{4x^2}{x^2 - 9} + 2 \implies 4x^2 = -2(x^2 - 9)$$

$$6x^2 = 18 \implies x = \pm\sqrt{3}$$

$$f(0) = \frac{4 \cdot 0^2}{0^2 - 9} + 2 = 2$$

$$(-\sqrt{3}, 0), \quad (\sqrt{3}, 0), \quad (0, 2)$$

الجواب النهائي
نقاط التقاطع مع المحورين

$$(-\sqrt{3}, 0), \quad (\sqrt{3}, 0), \quad (0, 2)$$

د(2، 3) . نقطة قصوى ومجالات التصاعد والتنازل

نشق باستعمال قاعدة القسمة: مشتقة البسط مضروبة بالمقام، ناقص مشتقة المقام مضروبة بالبسط، والكل على مربع المقام. نفصل المجال عند القيمتين غير المعرفتين.

$$f'(x) = \frac{(8x)(x^2 - 9) - (2x)(4x^2)}{(x^2 - 9)^2}$$

$$f'(x) = \frac{8x^3 - 72x - 8x^3}{(x^2 - 9)^2} = \frac{-72x}{(x^2 - 9)^2}$$

$$f'(x) = 0 \implies x = 0, \quad f(0) = 2$$

$$(-\infty, -3), (-3, 0) \nearrow \quad (0, 3), (3, \infty) \searrow$$

نختار قيماً من كل جزء من مجال التعريف، ونفحص إشارة المشتقة.

x	$(-\infty, -3)$ -4	-3	$(-3, 0)$ -2	0 (0, 2)	$(0, 3)$ 2	3	$(3, \infty)$ 4
$f'(x)$	+	—	+	0	—	—	—
$f(x)$	↗	—	↗	عظمى	↘	—	↘

$$f'(-4) > 0, \quad f'(-2) > 0, \quad f'(2) < 0, \quad f'(4) < 0$$

الجواب النهائي
نقطة العظمى ومجالات التصاعد والتنازل

(0, 2)

↗: $(-\infty, -3), (-3, 0)$

↘: $(0, 3), (3, \infty)$

د(4)، هـ · خطوط التقارب والرسم

خطّ التقارب العموديان عند صفري المقام؛ بسط الكسر عندهما غير صفري. للمقارب الأفقي نقارن أعلى قوتين في البسط والمقام.

$$x^2 - 9 = 0 \implies x = -3, x = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{4x^2}{x^2 - 9} + 2 \right) = 4 + 2 = 6$$

$$x = -3, \quad x = 3, \quad y = 6$$

الجواب النهائي
خطوط التقارب

$x = -3, \quad x = 3, \quad y = 6$

و · الدالة g

التعويض $x-7$ في f ينقل كل نقطة سبع وحدات إلى اليمين. ينتقل محور التماثل من $x=0$ إلى $x=7$.

$$g(x) = f(x-7) = \frac{4(x-7)^2}{(x-7)^2 - 9} + 2$$

$$(x-7)^2 - 9 = 0 \implies x-7 = \pm 3 \implies x = 4, x = 10$$

$$y = 6, \quad g(7+t) = g(7-t)$$

$$x = 4, \quad x = 10, \quad y = 6, \quad x_{\text{axis}} = 7$$

الجواب النهائي
خطوط التقارب ومحور التماثل للدالة المزاحة؛ وهي غير زوجية

$x = 4, \quad x = 10, \quad y = 6$

$x_{\text{axis}} = 7$

السؤال 7 • دالة الجذر ورسم المشتقة والمساحة

نص السؤال من امتحان البجروت العربي:

7. معطاة الدالة $f(x) = 2x - 4\sqrt{5x - 16}$.

أ. جدوا مجال تعريف الدالة $f(x)$.

ب. جدوا إحداثيات نقاط تقاطع الرسم البياني للدالة $f(x)$ مع المحور x .

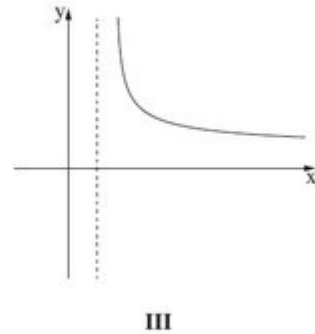
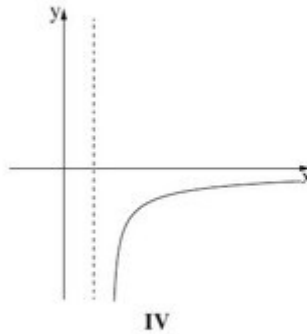
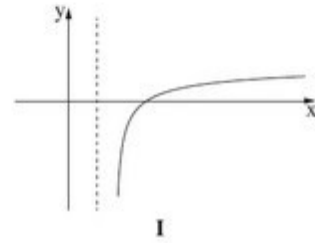
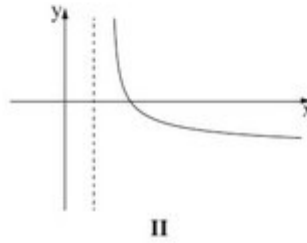
ج. جدوا إحداثيات جميع النقاط القصوى للدالة $f(x)$ ، وحددوا نوع هذه النقاط.

د. ارسموا رسماً بيانياً تقريبياً للدالة $f(x)$.

دالة المشتقة $f'(x)$ معرفة في المجال $x > 3.2$.

هـ. (1) حددوا أي رسم بياني من الرسوم البيانية I-IV التي في آخر السؤال يصف دالة المشتقة $f'(x)$.

(2) احسبوا المساحة المحصورة بين الرسم البياني لدالة المشتقة $f'(x)$ والمحور x والمستقيمين $x = 4$ و $x = 13$.



أ. مجال التعريف

ليكون الجذر حقيقياً يجب أن يكون ما تحت الجذر غير سالب.

$$5x - 16 \geq 0 \implies x \geq \frac{16}{5} = 3.2$$

$$x \geq \frac{16}{5}$$

ب . التقاطع مع محور x

نضع $y=0$ ، ثم نعزل الجذر ونربّع طرفي المعادلة. نتحقق من الحلين في الدالة الأصلية لأن التربيع قد يضيف حلولاً.

$$2x - 4\sqrt{5x - 16} = 0 \implies x = 2\sqrt{5x - 16}$$

$$x^2 = 4(5x - 16) \implies x^2 - 20x + 64 = 0$$

$$(x - 4)(x - 16) = 0 \implies x = 4, x = 16$$

$$f(4) = 0, \quad f(16) = 0$$

$$(4, 0), \quad (16, 0)$$

$$(4, 0), \quad (16, 0)$$

ج . النقاط القصوى

داخل المجال $x > 16/5$ نحل $f'(x)=0$. ثم نفحص إشارة المشتقة على جانبي النقطة وندرس طرف المجال $x=16/5$ على حدة.

$$f'(x) = 2 - 4 \cdot \frac{5}{2\sqrt{5x - 16}} = 2 - \frac{10}{\sqrt{5x - 16}}$$

$$f'(x) = 0 \implies \sqrt{5x - 16} = 5 \implies x = \frac{41}{5}$$

$$f\left(\frac{41}{5}\right) = -\frac{18}{5}, \quad f\left(\frac{16}{5}\right) = \frac{32}{5}$$

$$\left(\frac{41}{5}, -\frac{18}{5}\right) \text{ min, } \left(\frac{16}{5}, \frac{32}{5}\right) \text{ endpoint}$$

x	16/5 طرف	(16/5, 41/5) 4	41/5 صغرى	(41/5, ∞) 13
f'(x)	غير معرفة	—	0	+
f(x)	عظمى طرفية	↘	صغرى	↗

$$f(4) = -3 < 0, \quad f(13) = 2 - 10/7 = 4/7 > 0$$

الجواب النهائي

نقطة صغرى داخلية، ثم عظمى طرفية من جهة اليمين

$$\left(\frac{41}{5}, -\frac{18}{5}\right)$$

$$\left(\frac{16}{5}, \frac{32}{5}\right)$$

د. الرسم

نرتب نقطة بداية المجال، ونقطتي التقاطع مع محور x ، والنقطة الصغرى، ثم نصل بينها بحسب التصاعد والتنازل.

$$\left(\frac{16}{5}, \frac{32}{5}\right) \rightarrow (4, 0) \rightarrow \left(\frac{41}{5}, -\frac{18}{5}\right) \rightarrow (16, 0)$$

الجواب النهائي

يتناقص الرسم ثم يتصاعد عند النقطة الصغرى

$$\searrow: \frac{16}{5} < x < \frac{41}{5}$$

$$\nearrow: x > \frac{41}{5}$$

هـ(1) . رسم المشتقة

من صيغة f' نرى أنها تبدأ سالبة بلا حد قرب طرف المجال، وتزداد حتى الصفر، ثم تقترب من 2 من أسفل.

$$\lim_{x \downarrow 16/5} f'(x) = -\infty, \quad f'\left(\frac{41}{5}\right) = 0$$

$$f''(x) = \frac{25}{(5x - 16)^{3/2}} > 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 2$$

الجواب النهائي

الرسم الصحيح للمشتقة

I

هـ(2) . المساحة

نقسم المساحة عند $x=41/5$ حيث تتبدل إشارة المشتقة. تحت محور السينات نحسب تكامل صفر ناقص المشتقة، وفوقه تكامل المشتقة

ناقص صفر. ثم نستعمل أن الدالة الأصلية لـ f' هي f .

$$A_1 = \int_4^{41/5} (0 - f'(x)) dx = [-f(x)]_4^{41/5}$$

$$A_2 = \int_{41/5}^{13} (f'(x) - 0) dx = [f(x)]_{41/5}^{13}$$

$$f(4) = 2 \cdot 4 - 4\sqrt{20 - 16} = 8 - 8 = 0$$

$$f\left(\frac{41}{5}\right) = \frac{82}{5} - 4\sqrt{25} = \frac{82}{5} - 20 = -\frac{18}{5}$$

$$f(13) = 2 \cdot 13 - 4\sqrt{65 - 16} = 26 - 4 \cdot 7 = -2$$

$$A_1 = -f\left(\frac{41}{5}\right) + f(4) = \frac{18}{5}$$

$$A_2 = f(13) - f\left(\frac{41}{5}\right) = -2 + \frac{18}{5} = \frac{8}{5}$$

$$A = A_1 + A_2 = \frac{18}{5} + \frac{8}{5} = \frac{26}{5} = 5.2$$

الجواب النهائي
المساحة الكلية بوحدات المساحة

$$A = \frac{26}{5} = 5.2$$

السؤال 8 • مسألة تحسين مساحة الحيز

نص السؤال من امتحان البجروت العربي:

8. خُطِّطت مهندسة مناظر طبيعية حيزًا عامًا (منطقة محدّدة عامّة).

الحيز مكوّن من ثلاثة أقسام مربوطة ببعضها:

مدخل – المستطيل ABCD

سبيل وصول – المستطيل BEFC

حديقة تماثيل – المربع EGHK

النقاط A، B، E، G تقع على مستقيم واحد، كما هو موصوف في الرسم.



طول القطعة AG هو 8 أمتار.

طول الضلع EG هو ضعف طول الضلع AB.

نرمز بـ x إلى طول الضلع AB.

أ. عبّروا بدلالة x عن طول الضلع BE.

معطى أنّ مساحة المدخل هي 1 م².

ب. (1) عبّروا بدلالة x عن طول الضلع AD.

(2) عبّروا بدلالة x عن المساحة الكليّة للحيز.

ج. جدّوا قيمة x التي بالنسبة لها تكون المساحة الكليّة للحيز هي أصغر ما يمكن.

د. هل يمكن أن تكون المساحة الكليّة للحيز هي 9 م²؟ علّلوا إجابتكم.

أ • طول السبيل

على المستقيم AG تتجاور القطع AB وBE وEG. ضلع المربع EG ضعف AB، ولذلك $EG=2x$.

$$AG = AB + BE + EG \implies 8 = x + BE + 2x$$

$$BE = 8 - 3x, \quad x > 0, \quad BE > 0$$

الجواب النهائي

طول سبيل الوصول ومجال المتغيّر

$$BE = 8 - 3x, \quad 0 < x < \frac{8}{3}$$

ب(1) · عرض المدخل

مساحة المدخل المستطيل ABCD متر مربع واحد. نعوض الطول $AB=x$ في دستور المساحة.

$$S_{ABCD} = AB \cdot AD = x \cdot AD = 1$$

$$AD = \frac{1}{x}$$

الجواب النهائي
عرض المدخل بالأمتار

$$AD = \frac{1}{x}$$

ب(2) · المساحة الكلية

مساحة الحيز مجموع مساحات المدخل وسبيل الوصول والمربع. ارتفاع المستطيلين $AD=BC=EF=1/x$.

$$S_{ABCD} = 1, \quad S_{BEFC} = BE \cdot BC = \frac{8-3x}{x}$$

$$S_{EGHK} = EG^2 = (2x)^2 = 4x^2$$

$$S(x) = 1 + \frac{8-3x}{x} + 4x^2 = \frac{8}{x} - 2 + 4x^2$$

$$S(x) = \frac{8}{x} - 2 + 4x^2, \quad 0 < x < \frac{8}{3}$$

الجواب النهائي
دالة المساحة الكلية ومجالها

$$S(x) = \frac{8}{x} - 2 + 4x^2, \quad 0 < x < \frac{8}{3}$$

ج · القيمة الصغرى

نشتق دالة المساحة على مجالها ونحل $S'(x)=0$. بما أن x^2 موجب، تحدد إشارة x^3-1 إشارة المشتقة.

$$S'(x) = -\frac{8}{x^2} + 8x = \frac{8(x^3-1)}{x^2}$$

$$S'(x) = 0 \implies x^3 = 1 \implies x = 1$$

$$S(1) = \frac{8}{1} - 2 + 4 \cdot 1^2 = 10$$

x	$\frac{0,1}{1/2}$	$\frac{1}{(1,10)}$	$\frac{(1,8/3)}{2}$
$S'(x)$	—	0	+
$S(x)$	↘	صغرى	↗

$$S'(1/2) = -28 < 0, \quad S'(2) = 14 > 0$$

الجواب النهائي

القيمة التي تحقق أصغر مساحة والمساحة الصغرى

$$x = 1, \quad S_{\min} = 10 \text{ m}^2$$

د. هل 9 م² ممكنة؟

نقارن القيمة المطلوبة بأصغر قيمة وجدناها للدالة على المجال المسموح.

$$0 < x < \frac{8}{3} : \quad S(x) \geq S(1) = 10 > 9$$

الجواب النهائي

المساحة المطلوبة غير ممكنة

$$S(x) \geq 10 > 9$$