

حلول امتحان البجروت 35471

شتاء 2025 · النسخة أ · النموذج العربي الرسمي · النسخة أ

حلول عربية مفصلة، مع فصل الجواب النهائي عن خطوات الحساب.

حلول تعليمية أصلية وليست حلولاً رسمية للوزارة.

حقوق النشر والطباعة | mathbagrut.com

© 2026 mathbagrut.com — حقوق الشرح والحلول والتصميم محفوظة. الطباعة التعليمية الشخصية أو الصفية مسموحة مع إبقاء

اسم الموقع. إعادة النشر أو البيع تحتاج إذناً خطياً.

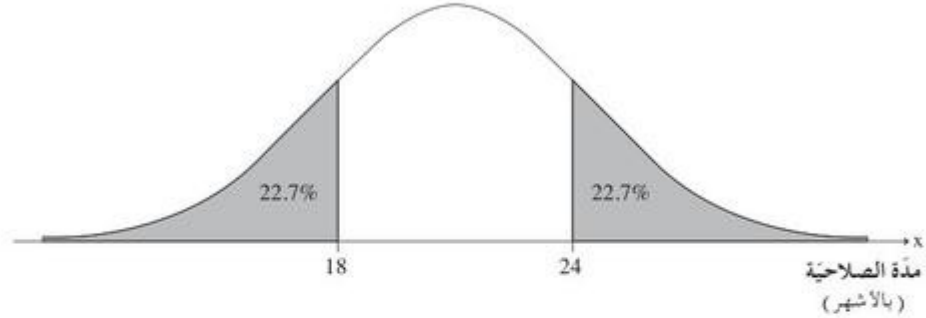
نص السؤال من امتحان وزارة التربية والتعليم؛ حقوق النص الأصلي والرسوم للوزارة. الحلول تعليمية مستقلة وليست حلاً رسمياً.

السؤال 1 • التوزيع الطبيعي لمدة صلاحية الهواتف

أجبوا عن خمسة من الأسئلة 1-8، على الأقل عن سؤال واحد من كل فصل. (لكل سؤال – 20 درجة).
انتبهوا: إذا أجبتكم عن أكثر من خمسة أسئلة، تُفحص فقط الإجابات الخمس الأولى التي في دفتركم.

الفصل الأول – الإحصاء والاحتمال

1. مدّة صلاحية الهواتف التي يُنتجونها في مصنع معيّن تتوزّع طبيعيًا.
أمامكم الرسم البياني للتوزيع الطبيعي لمدّة صلاحية الهواتف، وعليه جزء من معطيات مدّة الصلاحية (بالشهر).



- أ. جدوا معدّل مدّد صلاحية الهواتف والانحراف المعياري.
3.5% من الهواتف – تلك التي مدّة صلاحيتها هي الأقصر – تُعتبر تالفة.
ب. ما هي أطول مدّة صلاحية للهاتف الذي يُعتبر تالفًا؟
أنتجوا في المصنع في شهر معيّن 2,000 هاتف.
ج. حسب الرسم البياني للتوزيع الطبيعي، كم هاتفًا من الهواتف التي أنتجوها في هذا الشهر مدّة صلاحيتها هي أطول من 26 شهرًا؟
نجح المهندسون في زيادة مدّة صلاحية جميع الهواتف التي يُنتجها المصنع، بحيث أصبحت 1.5 ضعف ما كانت عليه.
د. (1) ما هو المعدّل الجديد لمدّد صلاحية الهواتف، وما هو الانحراف المعياري الجديد، بعد الزيادة؟
(2) جدوا النسبة المئوية للهواتف التي مدّة صلاحيتها أقل من 18 شهرًا، بعد الزيادة.

13 صفحة

أ • المعدل والانحراف المعياري

ذيلان متساويان عند 18 و24؛ المنتصف هو المعدل. مساحة 22.7% إلى يسار 18 تقابل $z \approx -0.75$.

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{18 + 24}{2} = 21 \\ P(X < 18) &= 0.227 \\ z &\approx -0.75 \\ \frac{18 - 21}{\sigma} &= -0.75 \\ \sigma &= \frac{-3}{-0.75} = 4\end{aligned}$$

الجواب النهائي
المعدل والانحراف المعياري بالأشهر

$$\mu = 21, \quad \sigma = 4$$

ب . أطول مدة للهاتف التالف

الهواتف التالفة هي الأقصر، ولذلك نستخدم المساحة يسار حد التلف: 0.035.

$$P(X < L) = 0.035$$

$$P(Z < -1.81) \approx 0.035$$

$$\frac{L - 21}{4} = -1.81$$

$$L = 21 - 1.81(4) = 13.76$$

الجواب النهائي
حد مدة التلف

$$L \approx 13.76 \text{ months}$$

ج . عدد الهواتف فوق 26 شهرًا

من جدول التوزيع الطبيعي نحسب النسبة أولاً، ثم نضرب في 2000 هاتف.

$$z = \frac{26 - 21}{4} = 1.25$$

$$P(X > 26) = 1 - \Phi(1.25)$$

$$P(X > 26) = 1 - 0.8944 = 0.1056$$

$$2000(0.1056) = 211.2 \approx 211$$

الجواب النهائي
عدد الهواتف المتوقع تقريباً

$$\approx 211$$

د(1) . المعدل والانحراف الجديان

إذا ضربت كل مدد الصلاحية في معامل موجب، يضرب المعدل والانحراف المعياري في المعامل نفسه.

$$Y = 1.5X$$

$$\mu_Y = 1.5\mu_X = 1.5(21) = 31.5$$

$$\sigma_Y = 1.5\sigma_X = 1.5(4) = 6$$

الجواب النهائي
المعدل والانحراف الجديان

$$\mu_Y = 31.5, \quad \sigma_Y = 6$$

د(2) . نسبة أقل من 18 بعد الزيادة

الشرط $1.5X < 18$ مكافئ لـ $X < 12$ ؛ العلامة المعيارية -2.25.

$$P(Y < 18) = P(1.5X < 18) = P(X < 12)$$

$$z = \frac{12 - 21}{4} = -2.25$$

$$P(Z < -2.25) = 0.0122$$

$$0.0122(100\%) = 1.22\%$$

الجواب النهائي
النسبة المئوية المطلوبة

1.22%

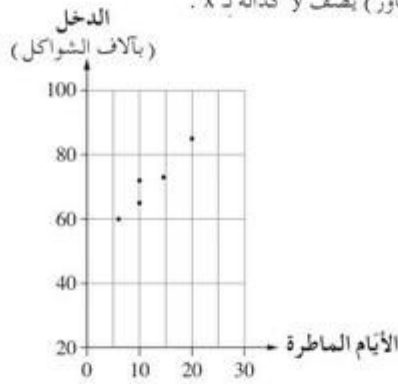
السؤال 2 . ارتباط دخل الصيدلية بالأيام الماطرة

الشهر (المتغير x) وبين الدخل الشهري للصيدلية (المتغير y) في نفس الشهر. الجدول الذي أمامكم يعرض المعطيات التي جمعتها المديرية.

الشهر	الأيام الماطرة (المتغير x)	الدخل (بآلاف الشواكل) (المتغير y)
تشرين الثاني	6	60
كانون الأول	10	72
كانون الثاني	20	85
شباط	14	73
آذار	10	65

أ. جدوا معدّل الأيام الماطرة في الشهر، والانحراف المعياري.

أمامكم مخطط مبعثر (نقاط في هيئة محاور) يصف y كدالة لـ x .



معدّل المدخولات الشهرية (بآلاف الشواكل) للصيدلية "أ" هو 71، والانحراف المعياري هو 8.46.

أحد الأعداد: 0.959، 1، -0.959 هو معامل التناسب r .

ب. جدّوا أيّاً منها هو معامل التناسب r ، وعلّلوا تحديدكم.

ج. (1) جدّوا ميل مستقيم الانحدار للتنبؤ بـ y حسب x .

(2) جدّوا معادلة مستقيم الانحدار للتنبؤ بـ y حسب x .

د. حسب مستقيم الانحدار، ما هو التنبؤ بالدخل في الشهر الذي فيه عدد الأيام الماطرة هو 15؟

في الصيدلية "ب" أيضاً، في نفس المدينة، فحصت المديرية، خلال 5 الأشهر نفسها، العلاقة بين عدد الأيام الماطرة في الشهر والدخل الشهري للصيدلية.

وجدت المديرية أنّه في كلّ شهر، كان دخل الصيدلية "ب" أقلّ بـ 20 ألف شيكل من دخل الصيدلية "أ".

هـ. اكتبوا معادلة مستقيم الانحدار للتنبؤ بالدخل الشهري (بآلاف الشواكل) للصيدلية "ب"، حسب

عدد الأيام الماطرة في الشهر.

/ يتبع في صفحة 4 /

أ . معدل الأيام وانحرافها

نستعمل الانحراف المعياري للمجتمع في هذا السؤال بقسمة مجموع مربعات الفروق على خمسة.

$$\bar{x} = \frac{6 + 10 + 20 + 14 + 10}{5} = 12$$

$$s_x^2 = \frac{(6 - 12)^2 + (10 - 12)^2 + (20 - 12)^2 + (14 - 12)^2 + (10 - 12)^2}{5}$$

$$s_x^2 = \frac{36 + 4 + 64 + 4 + 4}{5} = 22.4$$

$$s_x = \sqrt{22.4} \approx 4.733$$

الجواب النهائي
المعدل والانحراف المعياري

$$\bar{x} = 12, \quad s_x \approx 4.733$$

ب. اختيار r

النقاط تصعد عموماً ولكنها ليست كلها على مستقيم واحد؛ نتحقق أيضاً من التغير الموجب.

$$\bar{y} = 71$$

$$\text{Cov}(x, y) = \frac{(-6)(-11) + (-2)(1) + (8)(14) + (2)(2) + (-2)(-6)}{5}$$

$$\text{Cov}(x, y) = \frac{66 - 2 + 112 + 4 + 12}{5} = 38.4$$

$$r = \frac{38.4}{\sqrt{22.4}(8.46)} \approx 0.959$$

الجواب النهائي
معامل الارتباط

$$r = 0.959$$

ج(1) ميل الانحدار

الميل موجب، ووحدته آلاف الشواكل لكل يوم ماطر إضافي.

$$b = \frac{\text{Cov}(x, y)}{s_x^2}$$

$$b = \frac{38.4}{22.4} = \frac{12}{7} \approx 1.714$$

الجواب النهائي
ميل الانحدار

$$b = 12/7$$

ج(2) معادلة الانحدار

المستقيم y حسب x يمر بالنقطة (12, 71).

$$\hat{y} = bx + a$$

$$71 = \frac{12}{7}(12) + a$$

$$a = 71 - \frac{144}{7} = \frac{353}{7}$$

$$\hat{y} = \frac{12}{7}x + \frac{353}{7}$$

الجواب النهائي
معادلة التنبؤ بالآلاف

$$\hat{y} = (12x + 353)/7$$

د . التنبؤ عند 15 يومًا

نحافظ على وحدة الدخل وهي ألف شيكل.

$$\hat{y}(15) = \frac{12}{7}(15) + \frac{353}{7}$$

$$\hat{y}(15) = \frac{180 + 353}{7} = \frac{533}{7} \approx 76.143$$

الجواب النهائي
الدخل المتوقع بآلاف الشواكل

$$\hat{y} \approx 76.143$$

هـ . الصيدلية ب

الفرق ثابت لكل شهر؛ إذا ميل الانحدار لا يتغير، وينخفض المقطع بمقدار 20.

$$y_B = y_A - 20$$

$$\hat{y}_B = \frac{12x + 353}{7} - 20$$

$$\hat{y}_B = \frac{12x + 353 - 140}{7} = \frac{12x + 213}{7}$$

الجواب النهائي
مستقيم الصيدلية ب

$$\hat{y}_B = (12x + 213)/7$$

السؤال 3 • احتمال الأولاد والبنات ورخص القيادة

ليس بحوزتهم رخصة قيادة.

25% من طلاب طبقة الحوادي عشر هم أولاد ليس بحوزتهم رخصة قيادة.

بحوزة $\frac{1}{3}$ الأولاد في طبقة الحوادي عشر رخصة قيادة.

أ. جدوا النسبة المئوية للأولاد في طبقة الحوادي عشر.

الاحتمال بأن يُختار بشكل عشوائي من طبقة الحوادي عشر ولد بحوزته رخصة قيادة مساوٍ لاحتمال بأن تُختار

بشكل عشوائي من طبقة الحوادي عشر بنت بحوزتها رخصة قيادة.

ب. معلوم أنه اختير بشكل عشوائي طالب (ولد أو بنت) من طبقة الحوادي عشر ليس بحوزته رخصة قيادة.

ما هو الاحتمال بأن يكون الطالب الذي اختير ولدًا؟

يوجد في طبقة الحوادي عشر هذه 69 ولدًا.

ج. جدوا العدد الكلي للطلاب في طبقة الحوادي عشر هذه.

انضم إلى طبقة الحوادي عشر 26 طالبًا جديدًا (أولاد وبنات).

يختارون بشكل عشوائي طالبين من طبقة الحوادي عشر، الواحد تلو الآخر (إخراج بدون إعادة).

الاحتمال بأن يكون الطالبان اللذان اختيرا ولدَيْن هو $\frac{10}{77}$.

د. جدوا كم ولدًا انضم إلى طبقة الحوادي عشر.

/ يتبع في صفحة 5 /

أ • نسبة الأولاد

ثلث الأولاد بحوزتهم رخصة، وثلثاهم لا رخصة لديهم؛ وحصة غير المرخصين من جميع الطلبة 0.25.

الجنس / الرخصة بحوزته رخصة لا رخصة المجموع

ولد 0.125 0.25 0.375

بنت 0.125 0.50 0.625

1	0.75	0.25	المجموع
---	------	------	---------

$$P(B \cap \bar{L}) = P(B)P(\bar{L} | B) = 0.25$$

$$P(\bar{L} | B) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$P(B) \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{8} = 0.375$$

الجواب النهائي
نسبة الأولاد

37.5%

ب . احتمال ولد بشرط عدم الرخصة

احتمال الولد المرخص $0.125 = 0.375/3$ ، وكذلك البنت المرخصة؛ البقية بلا رخصة.

الجنس / الرخصة بمحوته رخصة لا رخصة المجموع

0.375	0.25	0.125	ولد
-------	------	-------	-----

0.625	0.50	0.125	بنت
-------	------	-------	-----

1	0.75	0.25	المجموع
---	------	------	---------

$$P(B \cap L) = \frac{1}{3} \cdot 0.375 = 0.125$$

$$P(G \cap L) = 0.125$$

$$P(\bar{L}) = 1 - 0.125 - 0.125 = 0.75$$

$$P(B | \bar{L}) = \frac{P(B \cap \bar{L})}{P(\bar{L})} = \frac{0.25}{0.75} = \frac{1}{3}$$

الجواب النهائي
الاحتمال المشروط

$P(B | \bar{L}) = 1/3$

ج . عدد الطلبة

نقسم عدد الأولاد الفعلي على نسبة الأولاد.

$$0.375N = 69$$

$$N = \frac{69}{0.375} = \frac{69 \cdot 8}{3} = 184$$

الجواب النهائي
مجموع طلبة الطبقة

$$N = 184$$

د . الأولاد الجدد

بعد انضمام 26 يصبح المجموع 210. إذا انضم k أولاد، فعددهم $k+69$ ؛ في السحب الثاني يقل عدد الأولاد والطلبة واحدًا.

السحب ولد المجموع

الأول $210 \quad k+69$

الثاني بشرط ولد أولاً $209 \quad k+68$

$$N_{\text{new}} = 184 + 26 = 210$$

$$P(B_1 \cap B_2) = \frac{69+k}{210} \cdot \frac{68+k}{209} = \frac{10}{77}$$

$$(69+k)(68+k) = \frac{10 \cdot 210 \cdot 209}{77} = 5700$$

$$75 \cdot 76 = 5700$$

$$69+k = 75$$

$$k = 75 - 69 = 6$$

الجواب النهائي
عدد الأولاد الذين انضموا

$$k = 6$$

السؤال 4 • مثلث قائم وتشابه في المستوى

4. ABC هو مثلث قائم الزاوية ($\angle ABC = 90^\circ$).
 الضلع AB يقطع المحور y في النقطة P .
 معطى أن المستقيم CP يوازي المحور x .
 النقطة E تقع على المستقيم CP بحيث AE يوازي المحور y (انظروا الرسم).
 أ. برهنوا أن $\triangle AEP \sim \triangle CBP$.
 معطى أن: نسبة التشابه بين المثلث AEP والمثلث CBP هي $\frac{3}{5}$.
 $CP = 12.5$.
 ب. جدوا طول القطعة AP .
 معطى أن: $A(-6, 14)$ ، الإحداثي y للنقطة P هو أصغر من 14.
 ج. جدوا إحداثيات النقطتين C و P .
 د. (1) جدوا معادلة الضلع AB .
 (2) جدوا إحداثيات الرأس B .
 (3) جدوا مساحة الشكل الرباعي $AEBC$.

أ • تشابه المثلثين

AE عمودي على EP لأن أحدهما عمودي على محور x والآخر يوازيه، و CB عمودي على BP لأن ABC قائم عند B ؛ والزاوية عند P مشتركة بين المستقيمين AB و CP .

$$\begin{aligned}\angle AEP &= \angle CBP = 90^\circ \\ \angle APE &= \angle CPB \\ \triangle AEP &\sim \triangle CBP \quad (AA)\end{aligned}$$

الجواب النهائي
التشابه

$$\triangle AEP \sim \triangle CBP$$

ب • طول AP

يقابل الوتر AP الوتر CP ونسبة الصغير إلى الكبير $3/5$.

$$\begin{aligned}\frac{AP}{CP} &= \frac{3}{5} \\ AP &= \frac{3}{5}(12.5) = \frac{37.5}{5} = 7.5\end{aligned}$$

الجواب النهائي
طول القطعة AP

$$AP = 7.5$$

ج . إحداثيات P و C

P على محور y وتحت A؛ الفرق الأفقي 6. C على يمين P بمسافة 12.5 وعلى ارتفاع P نفسه.

$$A = (-6, 14), \quad P = (0, y_P)$$

$$AP^2 = 6^2 + (14 - y_P)^2 = 7.5^2$$

$$(14 - y_P)^2 = 56.25 - 36 = 20.25 = 4.5^2$$

$$y_P = 14 - 4.5 = 9.5$$

$$C = (12.5, 9.5)$$

الجواب النهائي
إحداثيات P و C

$$P = (0, 9.5), \quad C = (12.5, 9.5)$$

د(1) . معادلة AB

نستعمل صورة الميل والمقطع لأن P نقطة تقاطع مع محور y.

$$m_{AB} = \frac{9.5 - 14}{0 - (-6)} = \frac{-4.5}{6} = -\frac{3}{4}$$

$$AB: y = -\frac{3}{4}x + 9.5$$

الجواب النهائي
معادلة الضلع AB

$$y = -3x/4 + 9.5$$

د(2) . الرأس B

ميل BC هو 4/3 لأنه عمودي على AB. نساوي معادلتَي المستقيمين.

$$m_{BC} = \frac{4}{3}$$

$$BC: y - 9.5 = \frac{4}{3}(x - 12.5)$$

$$-\frac{3}{4}x = \frac{4}{3}(x - 12.5)$$

$$-9x = 16x - 200$$

$$25x = 200$$

$$x_B = 8, \quad y_B = -\frac{3}{4}(8) + 9.5 = 3.5$$

الجواب النهائي
إحداثيات الرأس B

$$B = (8, 3.5)$$

د(3) • مساحة AEBC

النقطتان E و C على $y=9.5$ ؛ المثلث AEC فوق هذا المستقيم والمثلث EBC تحته.

$$E = (-6, 9.5)$$

$$EC = 12.5 - (-6) = 18.5$$

$$S_{AEC} = \frac{1}{2}(18.5)(14 - 9.5) = 41.625$$

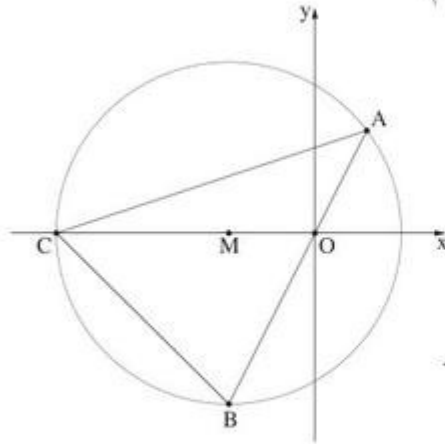
$$S_{EBC} = \frac{1}{2}(18.5)(9.5 - 3.5) = 55.5$$

$$S_{AEBC} = 41.625 + 55.5 = 97.125$$

الجواب النهائي
مساحة الشكل الرباعي

$$S_{AEBC} = 97.125$$

السؤال 5 . مثلث محصور في دائرة



5. المثلث ABC محصور في دائرة مركزها M ، كما هو موصوف في الرسم .

معطى أن : $C(-15, 0)$ ، $M(-5, 0)$.

أ. جدوا معادلة الدائرة .

معطى أن : معادلة الضلع AB هي $y = 2x$.

ب. جدوا إحداثيات الرأسين A و B .

النقطة O هي نقطة أصل المحاور .

ج. جدوا مقدار الزاوية ACO ، ومقدار الزاوية AOC .

د. جدوا مساحة المثلث ABC .

النقطة E تقع على الضلع AC بحيث مساحة المثلث EAB هي 64 .

هـ. جدوا طول القطعة AE .

/ يتبع في صفحة 6 /

أ . معادلة الدائرة

نصف القطر MC يساوي 10 وحدات.

$$M = (-5, 0), \quad C = (-15, 0)$$

$$R = |-15 - (-5)| = 10$$

$$(x + 5)^2 + y^2 = 10^2 = 100$$

الجواب النهائي
معادلة الدائرة

$$(x + 5)^2 + y^2 = 100$$

ب . إحداثيات A و B

الجذر الموجب يعطي A فوق محور x ، والجذر السالب يعطي B تحت.

$$(x + 5)^2 + (2x)^2 = 100$$

$$5x^2 + 10x - 75 = 0$$

$$x^2 + 2x - 15 = (x + 5)(x - 3) = 0$$

$$x_A = 3 \implies y_A = 6$$

$$x_B = -5 \implies y_B = -10$$

الجواب النهائي
رأس المثلث

$$A = (3, 6), \quad B = (-5, -10)$$

ج . الزاويتان AOC وACO

CO يوازي محور x الموجب. ميل CA هو 6/18؛ اتجاه OA يصنع $\arctan(2)$ مع المحور الموجب، وOC على المحور السالب.

$$\angle ACO = \arctan \frac{6}{18} = \arctan \frac{1}{3} \approx 18.435^\circ$$

$$\angle AOC = 180^\circ - \arctan \frac{6}{3}$$

$$\angle AOC = 180^\circ - 63.435^\circ \approx 116.565^\circ$$

الجواب النهائي
مقدار الزاويتين

$$\angle ACO \approx 18.435^\circ, \quad \angle AOC \approx 116.565^\circ$$

د . مساحة ABC

نطرح إحداثيات C من A وB ثم نأخذ نصف القيمة المطلقة للمحدد.

$$\vec{CA} = (18, 6), \quad \vec{CB} = (10, -10)$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |18(-10) - 6(10)|$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |-240| = 120$$

الجواب النهائي
مساحة المثلث ABC

$$S_{ABC} = 120$$

هـ . طول AE

المثلثان لهما القاعدة AB، والنقطة E على AC؛ نسبة المساحتين تساوي AE/AC.

$$\frac{AE}{AC} = \frac{S_{EAB}}{S_{CAB}} = \frac{64}{120} = \frac{8}{15}$$

$$AC = \sqrt{(3+15)^2 + 6^2} = \sqrt{360} = 6\sqrt{10}$$

$$AE = \frac{8}{15}(6\sqrt{10}) = \frac{16\sqrt{10}}{5}$$

الجواب النهائي
طول القطعة AE

$$AE = 16\sqrt{10}/5$$

السؤال 6 • دالة نسبية وإزاحة مشتقة

وللدوال النسبية والدوال الجذر

6. معطاة الدالة $f(x) = \frac{x^2 + x + a}{x}$ ، $a \neq 0$ هو بارامتر .

أ. (1) جدوا مجال تعريف الدالة $f(x)$.

(2) جدوا معادلات خطوط التقارب المعامدة للمحورين، للدالة $f(x)$ (إذا وجدت مثل هذه الخطوط) .

معطى أن الرسم البياني للدالة $f(x)$ يمر في النقطة $(2, 7.5)$.

ب. جدوا قيمة a .

عوضوا $a = 9$ ، وأجيبوا عن البنود "ج-هـ" .

ج. جدوا إحداثيات النقاط القصوى للدالة $f(x)$ ، وحددوا نوع هذه النقاط .

د. ارسموا رسماً بيانياً تقريبياً للدالة $f(x)$.

$g(x)$ هي دالة مجال تعريفها مطابق لمجال تعريف الدالة $f(x)$.

مشتقة الدالة $g(x)$ تحقق $g'(x) = f(x) - 11$.

هـ. (1) ارسموا رسماً بيانياً تقريبياً لدالة المشتقة $g'(x)$.

(2) جدوا الإحداثيات x للنقاط القصوى للدالة $g(x)$ ، وحددوا نوع هذه النقاط .

/ يتبع في صفحة 7 /

أ(1) • مجال التعريف

المقام x ، والبارامتر a غير صفري، فلا تختزل المشكلة عند الصفر.

$$f(x) = \frac{x^2 + x + a}{x} = x + 1 + \frac{a}{x} \\ x \neq 0$$

الجواب النهائي
مجال التعريف

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

أ(2) · خطوط التقارب الموازية للمحورين

عند الصفر الحد a/x غير محدود. وعند اللانهاية تبقى $x+1$ ، فلا يوجد خط تقارب أفقي؛ يوجد مائل يذكر لتيسير الرسم.

$$\lim_{x \rightarrow 0^{\pm}} \left(x + 1 + \frac{a}{x} \right) = \pm \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} (f(x) - (x + 1)) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{a}{x} = 0$$

الجواب النهائي

خط التقارب العمودي؛ لا يوجد أفقي

$$x = 0$$

ب · قيمة a

الإحداثيان يحققان معادلة الدالة.

$$7.5 = \frac{2^2 + 2 + a}{2} = 3 + \frac{a}{2}$$

$$\frac{a}{2} = 7.5 - 3 = 4.5$$

$$a = 9$$

الجواب النهائي

قيمة البارامتر

$$a = 9$$

ج · النقاط القصوى

مع $a=9$ ، إشارة المشتقة $x^2/9 - 1$ تتغير عند -3 من موجب إلى سالب، وعند 3 من سالب إلى موجب.

$$f(x) = x + 1 + \frac{9}{x}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{9}{x^2} = \frac{(x-3)(x+3)}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \implies x = -3, 3$$

$$f(-3) = -3 + 1 - 3 = -5$$

$$f(3) = 3 + 1 + 3 = 7$$

الجواب النهائي

عظمى عند -3 وصغرى عند 3

$$(-3, -5), (3, 7)$$

د · الرسم التقريبي

$x=0$ يفصل فرعين؛ الأيسر له نهاية عظمى سالبة، والأيمن له نهاية صغرى موجبة. كلاهما يقترب من $y=x+1$ عند اللانهاية.

$$x = 0$$

$$y = x + 1$$

$$(-3, -5)$$

$$(3, 7)$$

الجواب النهائي
نقاط الرسم الأساسية

$$(-3, -5), (3, 7)$$

هـ(1) . رسم 'g'

نعطي جذري 'g' وخط التقارب والفرعين؛ النقاط القصوى لـ 'g' هي إزاحة نقاط f.

$$g'(x) = f(x) - 11 = x - 10 + \frac{9}{x}$$

$$g'(x) = \frac{x^2 - 10x + 9}{x} = \frac{(x-1)(x-9)}{x}$$

$$x = 0, \quad y = x - 10$$

$$(-3, -16), (3, -4)$$

الجواب النهائي
معطيات رسم المشتقة

$$g'(x) = \frac{(x-1)(x-9)}{x}$$

هـ(2) . موضع ونوع قصوى g

على (0,1) المشتقة موجبة، وعلى (1,9) سالبة، وبعد 9 موجبة؛ الصفر $x=0$ خارج مجال g.

$$g'(x) = \frac{(x-1)(x-9)}{x}$$

$$g'(x) > 0 \quad (0 < x < 1)$$

$$g'(x) < 0 \quad (1 < x < 9)$$

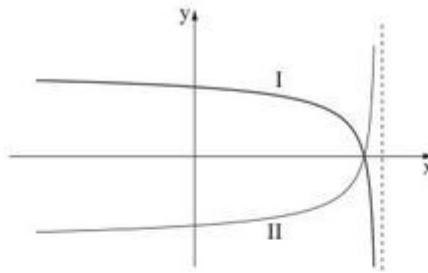
$$g'(x) > 0 \quad (x > 9)$$

الجواب النهائي

عظمى عند $x=1$ وصغرى عند $x=9$

$$x = 1, \quad x = 9$$

السؤال 7 • دالة جذر وقراءة رسم المشتقة



معرفة في المجال $x < 2$.

توجد للدالة $f(x)$ نقطة قصوى داخلية واحدة فقط، نوعها نقطة نهاية عظمى .

الرسم الذي أمامكم يصف الرسمين البيانيين، I و II ،

أحدهما يصف دالة المشتقة $f'(x)$.

أ. حددوا أيًا من الرسمين البيانيين يصف دالة المشتقة $f'(x)$ ،
وعلموا تحديدكم .

معطى أن: $f(x) = 4x + 2\sqrt{8-4x}$.

ب. جدوا إحداثيات جميع النقاط القصوى للدالة $f(x)$ ، وحددوا نوع هذه النقاط .

الرسم البياني للدالة $f(x)$ يقطع المحور x في نقطة واحدة فقط، في جزئه السالب .

ج. جدوا إحداثيات نقطة تقاطع الرسم البياني للدالة $f(x)$ مع المحور x .

د. ارسموا رسمًا بيانيًا تقريبياً للدالة $f(x)$.

معطاة الدالة $g(x) = -3 \cdot f'(x)$.

هـ. احسبوا المساحة المحصورة بين الرسم البياني للدالة $g(x)$ والمحور x والمحور y .

8. الرسم الذي أمامكم يصف الرسم البياني للدالة $f(x) = \frac{x+2}{x-4}$.

أ • تحديد منحنى المشتقة

يتصاعد f حتى النهاية العظمى ثم تنازل؛ لذا مشتقتها موجبة أولاً وسالبة بعد النقطة. في الرسم المنحني I أعلى محور x ثم يقطعه إلى أسفله.

$$f'(x) > 0 \quad (x < x_{\max})$$

$$f'(x) < 0 \quad (x > x_{\max})$$

الجواب النهائي
الرسم I هو المشتقة

I

ب • نقاط f القصوى

مجال الدالة $x \leq 2$ ، والمشتقة موجودة $x < 2$. تتبدل إشارتها عند $x = 7/4$ من موجب إلى سالب؛ عند الطرف $x = 2$ قيمتها 8.

$$f(x) = 4x + 2\sqrt{8-4x}$$

$$f'(x) = 4 + 2 \frac{-4}{2\sqrt{8-4x}} = 4 - \frac{4}{\sqrt{8-4x}}$$

$$f'(x) = 0 \implies \sqrt{8-4x} = 1$$

$$8 - 4x = 1 \implies x = \frac{7}{4}$$

$$f(7/4) = 7 + 2 = 9$$

$$f(2) = 8$$

الجواب النهائي

عظمى داخلية عند $7/4$ وصغرى طرفية عند 2

$$(7/4, 9), (2, 8)$$

ج . تقاطع x السالب

من $4x+2\sqrt{(8-4x)}=0$ ينتج $x \leq 0$ ؛ لذلك نرفض الجذر الموجب الناتج من التربيع.

$$2x = -\sqrt{8-4x}$$

$$4x^2 = 8-4x$$

$$x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1) = 0$$

$$x \leq 0 \Rightarrow x = -2$$

الجواب النهائي

نقطة تقاطع محور x

$$(-2, 0)$$

د . الرسم التقريبي

تأتي الدالة من قيم سالبة كبيرة، وتقطع محور x عند -2 ، ثم تبلغ العظمى $(7/4, 9)$ وتهبط إلى الطرف $(2, 8)$.

$$D_f = (-\infty, 2]$$

$$(-2, 0)$$

$$(7/4, 9)$$

$$(2, 8)$$

الجواب النهائي

معطيات الرسم

$$(-2, 0), (7/4, 9), (2, 8)$$

هـ . المساحة مع المحورين

'g=-3f سالبة بين x=0 والجذر x=7/4؛ لذا المساحة تساوي 3 مضروباً في تغير f بين هذين الحدين.

$$g(x) = -3f'(x)$$

$$S = \int_0^{7/4} |g(x)| dx = 3 \int_0^{7/4} f'(x) dx$$

$$S = 3(f(7/4) - f(0))$$

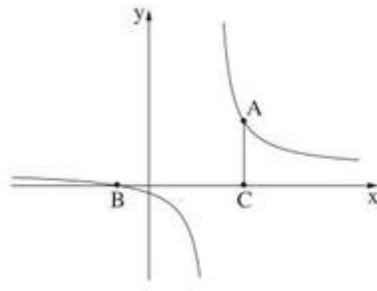
$$f(7/4) = 9, \quad f(0) = 2\sqrt{8} = 4\sqrt{2}$$

$$S = 3(9 - 4\sqrt{2}) = 27 - 12\sqrt{2}$$

الجواب النهائي
المساحة المحصورة

$$S = 27 - 12\sqrt{2}$$

السؤال 8 • مساحة مثلث بين دالة نسبية والمحور



8. الرسم الذي أمامكم يصف الرسم البياني للدالة $f(x) = \frac{x+2}{x-4}$.

النقطة A تقع على الرسم البياني للدالة $f(x)$ في الرُّبْع الأول.

النقطة C تقع على المحور x بحيث القطعة AC توازي المحور y.

النقطة B هي نقطة تقاطع الرسم البياني للدالة $f(x)$ مع المحور x.

أ. (1) جدوا مجال تعريف الدالة $f(x)$.

(2) جدوا معادلات خطوط التقارب المعامدة للمحورين،

للدالة $f(x)$.

ب. جدوا إحداثيات النقطة B.

ج. (1) جدوا إحداثيات النقطة A التي بالنسبة لها تكون مساحة المثلث ABC أصغر ما يمكن.

(2) جدوا أصغر مساحة ممكنة للمثلث ABC.

בהצלחה!

נשמתי לכם התנח!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל.

אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך.

חقوق الطبع محفوظة לדولة إسرائيل.

النسخ أو النشر ممنوعان إلا بإذن من وزارة التربية والتعليم.

05

أ(1) • المجال

قيمة $x=4$ ممنوعة، ويشمل مجال الدالة سائر الأعداد الحقيقية.

$$f(x) = \frac{x+2}{x-4}$$

$$x-4 \neq 0 \Rightarrow x \neq 4$$

الجواب النهائي
مجال التعريف

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$$

أ(2) • خطوط التقارب

يتبقى ثابت 1 عند اللانهاية، و $x=4$ صفر المقام دون صفر البسط.

$$f(x) = \frac{x-4+6}{x-4} = 1 + \frac{6}{x-4}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$$

$$x = 4$$

الجواب النهائي
خط التقارب

$$x = 4, \quad y = 1$$

ب . تقاطع x

عند $x = -2$ يبقى المقام -6 غير صفري.

$$x + 2 = 0 \implies x = -2$$
$$f(-2) = 0$$

الجواب النهائي
إحداثيات B

$$B = (-2, 0)$$

ج(1) . موضع A لأصغر مساحة

إذا $A = (t, f(t))$ في الربع الأول، ف $C = (t, 0)$ ، و $BC = t + 2$. نشتق مساحة المثلث.

$$S(t) = \frac{1}{2}(t+2)\frac{t+2}{t-4} = \frac{(t+2)^2}{2(t-4)}$$

$$S'(t) = \frac{2(t+2)(t-4) - (t+2)^2}{2(t-4)^2}$$

$$S'(t) = \frac{(t+2)(t-10)}{2(t-4)^2}$$

$$S'(t) = 0 \implies t = 10 \quad (t > 4)$$

$$f(10) = \frac{10+2}{10-4} = 2$$

الجواب النهائي
النقطة A عند أصغر مساحة

$$A = (10, 2)$$

ج(2) . أصغر مساحة

عند $t = 10$ ينتقل 'S' من السالب إلى الموجب، وتبلغ المساحة حدها الأدنى.

$$BC = 10 - (-2) = 12$$

$$AC = 2$$

$$S_{\min} = \frac{1}{2}(12)(2) = 12$$

$$S_{\min} = 12$$