

حلول امتحان البجروت 35471

صيف 2025 · الموعد ب · النموذج العربي الرسمي · النسخة أ

حلول عربية مفصّلة، مع فصل الجواب النهائي عن خطوات الحساب.

حلول تعليمية أصلية وليست حلولاً رسمية للوزارة.

حقوق النشر والطباعة | mathbagrut.com

© 2026 mathbagrut.com — حقوق الشرح والحلول والتصميم محفوظة. الطباعة التعليمية الشخصية أو الصفية مسموحة مع إبقاء

اسم الموقع. إعادة النشر أو البيع تحتاج إذناً خطياً.

نص السؤال من امتحان وزارة التربية والتعليم؛ حقوق النص الأصلي والرسوم للوزارة. الحلول تعليمية مستقلة وليست حلاً رسمياً.

السؤال 1 • التوزيع الطبيعي لعلامات القبول الجامعي

أجبوا عن خمسة من الأسئلة 1-8، عن سؤال واحد على الأقل من كل فصل. (لكل سؤال – 20 درجة .)
انتبهوا: إذا أجبتكم عن أكثر من خمسة أسئلة، تُفحص فقط الإجابات الخمس الأولى التي في دفتركم.

الفصل الأول – الإحصاء والاحتمال

1. العلامات في امتحان قبول للجامعة تتوزع طبيعيًا والانحراف المعياري هو 8 .
93.3% من المتقدمين حصلوا على علامة أقل من 94 .
أ. جدوا معدل العلامات في الامتحان .
44% من المتقدمين، أولئك الذين كانت علاماتهم هي الأعلى، قبلوا للجامعة .
ب. هل قبل المتقدم الذي علامته 84 للجامعة؟ عللوا إجابتكم .
قسم من المتقدمين معروفون كمتميزين، والبقية ليسوا معروفين كمتميزين .
المتقدمون الذين علامتهم أعلى من 92 معروفون كمتميزين .
ج. جدوا النسبة المئوية للمتقدمين الذين قبلوا للجامعة، وهم ليسوا متميزين .
2,171 متقدمًا قبلوا للجامعة، وهم ليسوا متميزين .
د. حسب جدول التوزيع الطبيعي، كم متقدمًا تقدم لامتحان القبول؟
للمتقدمين الذين لم يقبلوا للجامعة كانت إمكانية للتقدم لامتحان إضافي .
العلامات في الامتحان الإضافي أيضًا، تتوزع طبيعيًا ومعدلها هو 80 .
تقدم نادر للامتحانين وعلامته في كل واحد منهما هي 74 . العلامة المعيارية لنادر في الامتحانين متساوية .
هـ. جدوا الانحراف المعياري في الامتحان الإضافي .

أ • معدل العلامات

مساحة 0.933 يسار العلامة 94 تقابل $z \approx 1.50$ ، ولذلك المعدل أدنى منها باثني عشر.

$$\sigma = 8, \quad P(X < 94) = 0.933$$

$$\Phi(1.50) \approx 0.933$$

$$\frac{94 - \mu}{8} = 1.50$$

$$94 - \mu = 12$$

$$\mu = 82$$

الجواب النهائي
معدل العلامات

$$\mu = 82$$

ب . قبول صاحب علامة 84

إذا قبلوا أعلى 44%، تقع عتبة القبول عند المئين 56 تقريباً، أي $z \approx 0.15$.

$$P(X < c) = 1 - 0.44 = 0.56$$

$$\Phi(0.15) \approx 0.56$$

$$c \approx 82 + 0.15(8) = 83.2$$

$$84 > 83.2$$

الجواب النهائي
نعم، علامة 84 مقبولة

$$84 > c \approx 83.2$$

ج . نسبة المقبولين غير المتميزين

التميزون علامتهم أكبر من 92، وهم ضمن المقبولين لأن عتبتهم ≈ 83.2 ؛ نطرح نسبتهم من مجموع المقبولين.

$$z_{92} = \frac{92 - 82}{8} = 1.25$$

$$P(X > 92) = 1 - \Phi(1.25)$$

$$P(X > 92) = 1 - 0.8944 = 0.1056 \approx 10.6\%$$

$$P(c \leq X \leq 92) \approx 44\% - 10.6\% = 33.4\%$$

الجواب النهائي
نسبة جميع المتقدمين الذين قبلوا ولم يميزوا

$$33.4\%$$

د . عدد المتقدمين

وفق تقريب النسب الذي يوافق بيانات السؤال، 2171 يمثل 33.4% من المتقدمين.

$$0.334N = 2171$$

$$N = \frac{2171}{0.334} = 6500$$

الجواب النهائي
عدد المتقدمين

$$N = 6500$$

هـ . انحراف الامتحان الإضافي

في الامتحان الأول $z = (74 - 82) / 8 = -1$ ؛ في الإضافي المعدل 80 والنتيجة نفسها 74.

$$z_1 = \frac{74 - 82}{8} = -1$$

$$z_2 = \frac{74 - 80}{\sigma_2} = \frac{-6}{\sigma_2}$$

$$\frac{-6}{\sigma_2} = -1$$

$$\sigma_2 = 6$$

الجواب النهائي
الانحراف المعياري الإضافي

$$\sigma_2 = 6$$

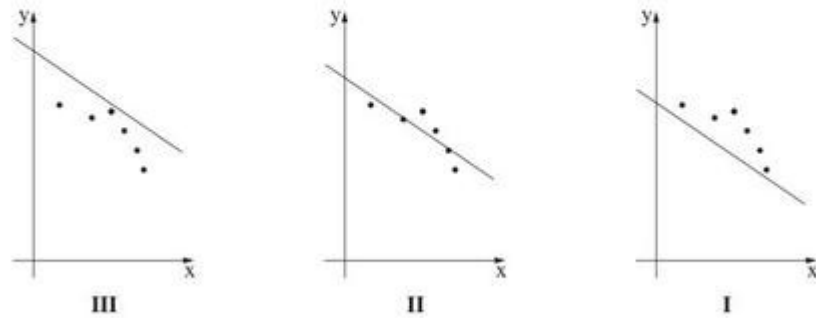
السؤال 2 . ارتباط مسافة الركض بالسرعة

في 6 مسارات مختلفة "أ" و "و"، المعطيات معروضة في الجدول الذي أمامكم.

المسار	مسافة الركض (كم) - المتغير x	سرعة الركض (كم / الساعة) - المتغير y
"أ"	2	12
"ب"	4.5	11
"ج"	6	11.5
"د"	7	?
"هـ"	8	8.5
"و"	8.5	7

- احسبوا معدل مسافات ركض أمير في 6 المسارات.
- بيّنوا أنّ الانحراف المعياري لمسافة ركض أمير في 6 المسارات هو $S_x = \sqrt{\frac{59}{12}}$.
- وجد أمير أنّ معدل سرعات ركضه في 6 المسارات مساوٍ لـ سرعة ركضه في المسار "د".
- احسبوا سرعة ركض أمير في المسار "د".
- معطاة الأعداد: 0.95 ، 0.24 ، -1 ، -0.86 . أحد هذه الأعداد هو مُعامل الارتباط r .
- حدّدوا أي عدد من الأعداد هو مُعامل الارتباط r ، وعلّلوا تحديدكم.
- حسب أمير الانحراف المعياري لـ سرعة ركضه في 6 المسارات، ووجد أنّ $S_y = \sqrt{\frac{37}{12}}$.
- هـ. (1) جدوا معادلة مستقيم (خطّ) الانحدار للتنبؤ بـ y حسب x .
(2) حسب مستقيم الانحدار، ما هو التنبؤ بسرعة ركض أمير لمسافة 4 كم؟

أمامكم ثلاثة مخططات تشتت III-I . النقاط في كلّ واحد من المخططات تصف معطيات ركض أمير في 6 المسارات .
و . حدّدوا في أي مخطط من المخططات III-I رُسم مستقيم الانحدار الذي وجدتموه في البند "هـ" . علّلوا تحديدكم.



أ . معدل المسافات

نجمع x لكل المسارات بما فيها المسار د.

$$\bar{x} = \frac{2 + 4.5 + 6 + 7 + 8 + 8.5}{6}$$

$$\bar{x} = \frac{36}{6} = 6$$

الجواب النهائي
معدل المسافات

$$\bar{x} = 6 \text{ km}$$

ب. إثبات s_x

نربع الانحرافات ونجمعها ثم نقسم على ستة.

$$s_x^2 = \frac{(2-6)^2 + (4.5-6)^2 + (6-6)^2 + (7-6)^2 + (8-6)^2 + (8.5-6)^2}{6}$$

$$s_x^2 = \frac{16 + 2.25 + 0 + 1 + 4 + 6.25}{6} = \frac{29.5}{6} = \frac{59}{12}$$

$$s_x = \sqrt{\frac{59}{12}}$$

الجواب النهائي
الانحراف المعياري المطلوب

$$s_x = \sqrt{59/12}$$

ج. سرعة المسار د

إذا كانت السرعة المجهولة v ، فمعدل الستة هو v .

$$\bar{y} = \frac{12 + 11 + 11.5 + v + 8.5 + 7}{6} = \frac{50 + v}{6}$$

$$\frac{50 + v}{6} = v$$

$$50 = 5v$$

$$v = 10$$

الجواب النهائي
سرعة المسار د

$$v = 10 \text{ km/h}$$

د. اختيار معامل الارتباط

معدل $y=10$ ؛ نقاط الركض تتجه إلى أسفل لكنها لا تقع كلها على مستقيم، فيكون r سالباً وغير كامل.

$$\text{Cov}(x, y) = \frac{(-4)(2) + (-1.5)(1) + (0)(1.5) + (1)(0) + (2)(-1.5) + (2.5)(-3)}{6}$$

$$\text{Cov}(x, y) = \frac{-8 - 1.5 - 3 - 7.5}{6} = -\frac{10}{3}$$

$$r = \frac{-10/3}{\sqrt{59/12}\sqrt{37/12}} = -\frac{40}{\sqrt{2183}} \approx -0.856$$

الجواب النهائي
معامل الارتباط من الخيارات

$$r \approx -0.86$$

هـ(1) • مستقيم الانحدار

نأخذ الميل الدقيق من الجدول ثم نمرر المستقيم بنقطة المعدلين (6,10).

$$b = \frac{\text{Cov}(x, y)}{s_x^2} = \frac{-10/3}{59/12} = -\frac{40}{59}$$

$$\hat{y} - 10 = -\frac{40}{59}(x - 6)$$

$$\hat{y} = \frac{830 - 40x}{59}$$

الجواب النهائي
مستقيم التنبؤ

$$\hat{y} = (830 - 40x)/59$$

هـ(2) • التنبؤ لمسافة 4

وحدة الجواب كم في الساعة.

$$\hat{y}(4) = \frac{830 - 40(4)}{59}$$

$$\hat{y}(4) = \frac{670}{59} \approx 11.356$$

الجواب النهائي
السرعة المتوقعة

$$\hat{y}(4) \approx 11.36 \text{ km/h}$$

و • الرسم المبعثر الموافق

مستقيم المربعات الصغرى يمر بنقطة المعدلين؛ في الرسم II تظهر النقاط فوق الخط وتحت الخط في مركزها.

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (6, 10)$$

$$\hat{y} = \frac{830 - 40x}{59}$$

$$b = -\frac{40}{59} < 0$$

الجواب النهائي
الخطط II

II

السؤال 3 • فاكهة في جارورين وسحب دون إعادة

- في الجارور "أ" توجد 5 تفاحات و 11 إجاصة .
في الجارور "ب" توجد 4 تفاحات و 6 إجاصات .
يُخرجون بشكل عشوائي ثمرة واحدة من الجارور "أ" ، وبعد ذلك يُخرجون بشكل عشوائي ثمرة واحدة من الجارور "ب" .
أ. ما هو احتمال إخراج ثمرة من نوعين مختلفين ؟
ب. (1) ما هو احتمال إخراج تفاحة واحدة على الأقل ؟
(2) معلوم أنهم أخرجوا تفاحة واحدة على الأقل . ما هو احتمال أنهم أخرجوا تفاحتين ؟
أعادوا كل ثمرة إلى الجارور الذي أخرجوها منه .
نقلوا من الجارورين جميع الثمار إلى الجارور "ج" ، الذي كان فارغاً .
بعد ذلك، أضافوا x تفاحات إلى الجارور "ج" .
يُخرجون بشكل عشوائي ثمرة واحدة تلو الأخرى ، (بدون إعادة) من الجارور "ج" .
معطى أن احتمال إخراج إجاصتين هو $\frac{8}{33}$.
ج. جدوا قيمة x .

أ • نوعان مختلفان

نرمز للتفاح بـ T وللإجاص بـ J، وللجارورين بالرمزين A و B. السحبتان من جارورين مختلفين؛ احتمالات الاختيار في كل منهما ثابتة.

جارور أ / جارور ب تفاح 4/10 إجاص 6/10

تفاح 5/16 1/8 3/16

إجاص 11/16 11/40 33/80

$$P(T_A \cap J_B) + P(J_A \cap T_B) = \frac{5}{16} \cdot \frac{6}{10} + \frac{11}{16} \cdot \frac{4}{10}$$

$$P(T_A \cap J_B) + P(J_A \cap T_B) = \frac{30}{160} + \frac{44}{160} = \frac{37}{80}$$

الجواب النهائي
احتمال نوعين مختلفين

$$P(\text{different}) = 37/80$$

ب(1) • تفاحة واحدة على الأقل

فرع إجاص ثم إجاص احتمال 11/16 ضرب 6/10.

جارور أ / جارور ب تفاح 4/10 إجاص 6/10

تفاح 5/16 1/8 3/16

إجاص 11/16 11/40 33/80

$$P(J_A \cap J_B) = \frac{11}{16} \cdot \frac{6}{10} = \frac{33}{80}$$

$$P(T_A \cup T_B) = 1 - \frac{33}{80} = \frac{47}{80}$$

الجواب النهائي
احتمال تفاحة على الأقل

$$47/80$$

ب(2) • تفاحتان بشرط تفاحة واحدة على الأقل

حدث تفاحتين محتوي في حدث تفاحة على الأقل.

جارور أ / جارور ب تفاح 4/10 إجاص 6/10

تفاح 5/16 1/8 3/16

إجاص 11/16 11/40 33/80

$$P(T_A \cap T_B) = \frac{5}{16} \cdot \frac{4}{10} = \frac{1}{8} = \frac{10}{80}$$

$$P(T_A \cap T_B \mid T_A \cup T_B) = \frac{10/80}{47/80} = \frac{10}{47}$$

الجواب النهائي
الاحتمال المشروط

10/47

جـ . عدد التفاحات المضافة

بعد الجمع يوجد 17 إجابة و9 تفاحات؛ مع x تفاحات جديدة يصبح المجموع $x+26$. في السحب الثاني يبقى 16 إجابة من أصل $x+25$.

المرحلة إحصاء المجموع

قبل السحب 17 $x+26$

بعد إجابة أولى 16 $x+25$

$$P(J_1 \cap J_2) = \frac{17}{26+x} \cdot \frac{16}{25+x} = \frac{8}{33}$$

$$(26+x)(25+x) = \frac{17 \cdot 16 \cdot 33}{8} = 1122$$

$$34 \cdot 33 = 1122$$

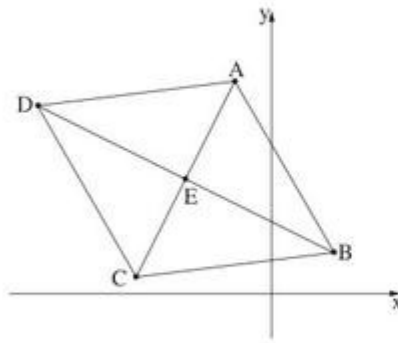
$$26+x = 34$$

$$x = 8$$

الجواب النهائي
عدد التفاحات المضافة

$$x = 8$$

السؤال 4 • معين وزاوية في هيئة محاور



4. في الرسم الذي أمامكم المعين ABCD . قطرا المعين يلتقيان في النقطة E . معطى أن معادلة الضلع AB هي $y = -1.75x + 11.75$ ، الإحداثي x للرأس A هو -3 ، وإحداثيات الرأس C هي (-11, 1) .
- جدوا إحداثيات النقطة E .
 - جدوا ميل القطر AC .
 - جدوا معادلة القطر BD .
 - جدوا إحداثيات الرأس B .
 - جدوا مقدار الزاوية ABE .
 - النقطة G تقع على القطعة DE بحيث مقدار الزاوية GAB هو 97° .
 - جدوا طول القطعة GE .

أ(1) • تقاطع القطرين E

نحدد A من $x = -3$ ومعادلة AB، ثم نأخذ منتصف AC.

$$y_A = -1.75(-3) + 11.75 = 17$$

$$A = (-3, 17), \quad C = (-11, 1)$$

$$E = \left(\frac{-3 - 11}{2}, \frac{17 + 1}{2} \right) = (-7, 9)$$

الجواب النهائي
تقاطع القطرين

$$E = (-7, 9)$$

أ(2) • ميل AC

النقطتان A و C معلومتان.

$$m_{AC} = \frac{1 - 17}{-11 - (-3)} = \frac{-16}{-8} = 2$$

الجواب النهائي
ميل القطر AC

$$m_{AC} = 2$$

ب(1) • القطر BD

ميل BD هو المعكوس السالب 2، أي $-1/2$ ؛ وهو يمر بالنقطة E.

$$m_{BD} = -\frac{1}{2}$$

$$y - 9 = -\frac{1}{2}(x + 7)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{11}{2}$$

الجواب النهائي
معادلة BD

$$y = -x/2 + 11/2$$

ب(2) · الرأس B

نساوي المعادلتين ونرجع لحساب y.

$$-1.75x + 11.75 = -0.5x + 5.5$$

$$-1.25x = -6.25$$

$$x_B = 5$$

$$y_B = -0.5(5) + 5.5 = 3$$

الجواب النهائي
إحداثيات B

$$B = (5, 3)$$

ج · مقدار ABE

BA و BE يخرجان من B؛ نحسب جيب تمام الزاوية ونستخرجها بالآلة.

$$\vec{BA} = (-8, 14), \quad \vec{BE} = (-12, 6)$$

$$\vec{BA} \cdot \vec{BE} = 96 + 84 = 180$$

$$|BA| = \sqrt{260} = 2\sqrt{65}, \quad |BE| = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$$

$$\cos \angle ABE = \frac{180}{(2\sqrt{65})(6\sqrt{5})} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\angle ABE \approx 33.690^\circ$$

الجواب النهائي
مقدار الزاوية

$$\angle ABE \approx 33.69^\circ$$

د · طول GE

في المثلث ABE، الزاوية BAE تساوي $90^\circ - \angle ABE$ لأن قطري المعين متعامدان. AG أبعد عن AB من AE، لذا

EAG = GAB - BAE. المثلث AEG قائم عند E.

$\angle BAE = 90^\circ - 33.690^\circ = 56.310^\circ$

$\angle EAG = 97^\circ - 56.310^\circ = 40.690^\circ$

$AE = \sqrt{(-7 + 3)^2 + (9 - 17)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

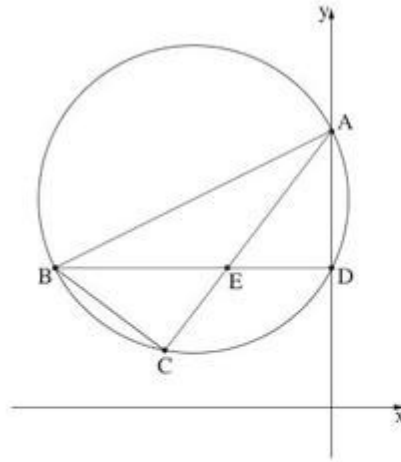
$\tan \angle EAG = \frac{GE}{AE}$

$GE = 4\sqrt{5} \tan(40.690^\circ) \approx 7.691$

الجواب النهائي
طول GE

$GE \approx 7.69$

السؤال 5 • دائرة وقطر ووتران متقاطعان



5. معطاة دائرة تقطع الجزء الموجب للمحور y في النقطتين A و D ، كما هو موصوف في الرسم .

BD و AC هما وتران في الدائرة، يتقاطعان في النقطة E .

معطى أن الوتر BD يوازي المحور x .

أ. (1) فسروا لماذا AB هو قطر في الدائرة .

(2) برهنوا أن $\angle CBD = \angle DAC$.

معطى أن: $BE = AE$.

ب. برهنوا أن $\triangle CBE \cong \triangle DAE$.

معطى أن: $E(-4.5, 6)$ ، $AE = 7.5$.

ج. جدوا إحداثيات النقطتين A و B .

النقطة M هي مركز الدائرة .

د. جدوا معادلة الدائرة .

هـ. (1) ما هو طول الضلع BC ؟ عللوا إجابيتكم .

(2) احسبوا محيط الشكل الرباعي $BCEM$.

أ(1) • إثبات أن AB قطر

AD على محور y و BD مواز لمحور x ، فهما متعامدان عند D ؛ الزاوية ADB المحيطية القائمة تحصر القطر AB .

$$\begin{aligned} AD &\perp BD \\ \angle ADB &= 90^\circ \\ \widehat{AB} &= 180^\circ \end{aligned}$$

الجواب النهائي
قطر الدائرة AB

$$\angle ADB = 90^\circ$$

أ(2) • تساوي الزاويتين

الزاويتان CBD و DAC محيطيتان وتحصران القوس CD نفسه.

$$\begin{aligned} \angle CBD &= \frac{1}{2} \widehat{CD} \\ \angle DAC &= \frac{1}{2} \widehat{CD} \\ \angle CBD &= \angle DAC \end{aligned}$$

الجواب النهائي
تساوي الزاويتين

$$\angle CBD = \angle DAC$$

ب . تطابق CBE و DAE

زاويتان متقابلتان بالرأس عند E، والزاويتان عند B و A متساويتان من البند السابق؛ والضلع المحصور BE=AE بالمعطى.

$$\angle CBE = \angle DAE$$

$$\angle CEB = \angle DEA$$

$$BE = AE$$

$$\triangle CBE \cong \triangle DAE \quad (\text{ASA})$$

الجواب النهائي
التطابق

$$\triangle CBE \cong \triangle DAE$$

ج . إحداثيات B و A

$E = (-4.5, 6)$ ، و $BE = AE = 7.5$. تقع B يسار E. تقع A على محور y فوق E؛ متساووس يعطي فرق y.

$$y_B = 6, \quad x_B = -4.5 - 7.5 = -12$$

$$A = (0, a), \quad (0 + 4.5)^2 + (a - 6)^2 = 7.5^2$$

$$(a - 6)^2 = 56.25 - 20.25 = 36$$

$$a - 6 = 6 \implies a = 12$$

الجواب النهائي
إحداثيات B و A

$$B = (-12, 6), \quad A = (0, 12)$$

د . معادلة الدائرة

مركز الدائرة منتصف AB؛ نصف القطر نصف AB.

$$M = \left(\frac{-12 + 0}{2}, \frac{6 + 12}{2} \right) = (-6, 9)$$

$$R^2 = (-12 + 6)^2 + (6 - 9)^2 = 36 + 9 = 45$$

$$(x + 6)^2 + (y - 9)^2 = 45$$

الجواب النهائي
معادلة الدائرة

$$(x + 6)^2 + (y - 9)^2 = 45$$

هـ(1) · طول BC

يقابل الضلع BC في المثلث CBE الضلع DA في المثلث DAE. D عند (0,6) و A عند (0,12).

$$D = (0, 6)$$

$$DA = 12 - 6 = 6$$

$$BC = DA = 6$$

الجواب النهائي
طول BC

$$BC = 6$$

هـ(2) . محيط BCEM

من التناظر $CE=DE$ ، و $DE=4.5$ ؛ EM مسافة بين E و M ، و MB نصف قطر الدائرة.

$$CE = DE = 0 - (-4.5) = 4.5$$

$$EM = \sqrt{(-6 + 4.5)^2 + (9 - 6)^2} = \sqrt{11.25} = 1.5\sqrt{5}$$

$$MB = R = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$P_{BCEM} = BC + CE + EM + MB$$

$$P_{BCEM} = 6 + 4.5 + 1.5\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 10.5 + 4.5\sqrt{5}$$

الجواب النهائي
محيط BCEM

$$P_{BCEM} = 10.5 + 4.5\sqrt{5}$$

السؤال 6 . دالة نسبية وإزاحة إلى أعلى

وللدوال النسبية وللدوال الجذر

6. معطاة الدالة $f(x) = \frac{9x}{(x+3)^2}$.

أ. (1) جدوا مجال تعريف الدالة $f(x)$.

(2) جدوا معادلات خطوط التقارب المعامدة للمحورين، للدالة $f(x)$.

(3) جدوا إحداثيات نقطة تقاطع الرسم البياني للدالة $f(x)$ مع المحور x .

(4) جدوا إحداثيات النقطة القصوى للدالة $f(x)$ ، وحددوا نوع هذه النقطة .

ب. ارسموا رسماً بيانياً تقريبياً للدالة $f(x)$.

المستقيم $y = k$ والرسم البياني للدالة $f(x)$ يلتقيان في نقطة واحدة بالضبط، $k > 0$.

ج. جدوا قيمة k .

معطاة الدالة $g(x) = f(x) + 1$.

د. (1) جدوا معادلات خطوط التقارب المعامدة للمحورين، للدالة $g(x)$.

(2) بالنسبة لقيمة k التي وجدتوها، كم نقطة مشتركة توجد للمستقيم $y = k$ ولرسم البياني للدالة $g(x)$ ؟

عللوا إجاباتكم .

أ(1) . المجال

المقام مربع $x+3$ ؛ تظل قيمة $x=-3$ ممنوعة.

$$f(x) = \frac{9x}{(x+3)^2}$$

$$(x+3)^2 \neq 0$$

$$x \neq -3$$

الجواب النهائي
مجال التعريف

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$$

أ(2) · التقارب

البسط عند -3 غير صفري، فتوجد مقارنة عمودية. درجة البسط أقل من المقام، فالحد عند اللانهاية صفري.

$$9(-3) = -27 \neq 0$$

$$x = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{9x}{(x+3)^2} = 0$$

الجواب النهائي
خط التقارب

$$x = -3, \quad y = 0$$

أ(3) · تقاطع محور x

الصفر ضمن المجال ويحقق $f(0)=0$.

$$9x = 0 \implies x = 0$$

$$f(0) = 0$$

الجواب النهائي
نقطة التقاطع

$$(0, 0)$$

أ(4) · النقطة القصوى

مشتقة البسط ضرب المقام ناقص مشتقة المقام ضرب البسط، ثم نقسم على مربع المقام.

$$f'(x) = \frac{9(x+3)^2 - 9x \cdot 2(x+3)}{(x+3)^4}$$

$$f'(x) = \frac{9(x+3)((x+3) - 2x)}{(x+3)^4}$$

$$f'(x) = \frac{9(3-x)}{(x+3)^3}$$

$$f'(x) = 0 \implies x = 3$$

$$f(3) = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$$

الجواب النهائي
نهاية عظمى

(3, 3/4)

ب . الرسم التقريبي

عند $x < -3$ تكون الدالة سالبة، وعلى $(-3, 0)$ سالبة أيضاً، ثم تصعد إلى $(3, 3/4)$ وتعود إلى $y=0$ من أعلى.

$$x = -3, \quad y = 0$$

$$(0, 0)$$

$$(3, 3/4)$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^{\pm}} f(x) = -\infty$$

الجواب النهائي
معطيات الرسم

(0, 0), (3, 3/4)

ج . قيمة k

عندما يكون $k > 3/4$ توجد نقطتا تقاطع حول العظمى. وعندما $k > 3/4$ لا يوجد تقاطع؛ وعند $k = 3/4$ تلتقي مرة واحدة.

$$f(3) = \frac{3}{4}$$

$$0 < k < \frac{3}{4} \implies N = 2$$

$$k = \frac{3}{4} \implies N = 1$$

$$k > \frac{3}{4} \implies N = 0$$

الجواب النهائي
قيمة k

$k = 3/4$

د(1) . تقارب g

الإزاحة الرأسية لا تغير موقع المقاربة العمودية، وترفع الأفقية من 0 إلى 1.

$$g(x) = \frac{9x}{(x+3)^2} + 1$$

$$x = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 1$$

الجواب النهائي
تقارب g

$$x = -3, \quad y = 1$$

د(2) . تقاطع y=k مع g

القيمة السالبة تتحقق على جانبي المقاربة $x=-3$ ، مرة على كل مجال تنازل/تصاعد مناسب؛ فلدينا تقاطعان.

$$g(x) = \frac{3}{4} \iff f(x) = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{9x}{(x+3)^2} = -\frac{1}{4}$$

$$36x = -(x+3)^2$$

$$x^2 + 42x + 9 = 0$$

$$\Delta = 42^2 - 4(9) = 1728 > 0$$

الجواب النهائي
عدد نقاط التقاطع

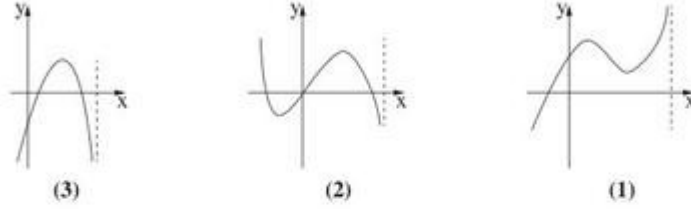
2

السؤال 7 • دالة جذر وتحديد رسم مشتقتها

ودالة مشتقتها $f'(x)$ معرفة في المجال $x < 1.5$.

للدالة $f(x)$ نقطتان قصويان داخليتان بالطبيعت.

أمامكم ثلاثة رسوم بيانية (1)–(3). أحد هذه الرسوم البيانية يصف دالة المشتقة $f'(x)$.



أ. حددوا أي رسم بياني من الرسوم البيانية (1)–(3) يصف دالة المشتقة $f'(x)$. علّلوا تحديدكم.

معطى أن: $f(x) = (x^2 + 1) \cdot \sqrt{3 - 2x}$.

ب. جدوا إحداثيات نقاط تقاطع الرسم البياني للدالة $f(x)$ مع المحورين.

ج. (1) جدوا إحداثيات جميع النقاط القصوى للدالة $f(x)$ ، وحددوا نوع هذه النقاط.

(2) جدوا مجالات تصاعد وتنازل الدالة $f(x)$.

د. ارسموا رسماً بيانياً تقريبياً للدالة $f(x)$.

هـ. جدوا المساحة المحصورة بين الرسم البياني لدالة المشتقة $f'(x)$ والمحور x .

8. الرسم الذي أمامكم يصف الرسم البياني للدالة $f(x) = \frac{x-3}{x-4}$ في المجال $x > 4$.

النقطة O هي نقطة أصل المحاور.

النقطة A تقع على الرسم البياني للدالة $f(x)$ في المجال $x > 4$.



المساحة المحصورة بين الرسم البياني للدالة $f(x)$ والمحور x هي 1.5.

أ. اختيار رسم المشتقة

الرسم (3) يبدأ سالباً، يقطع المحور مرتين في الجانب الموجب، ثم يتجه إلى $-\infty$ قرب $x=1.5$ ؛ وهذا يوافق وجود حدين داخليين.

$$D_f = (-\infty, 1.5]$$

$$D_{f'} = (-\infty, 1.5)$$

$$\#\{x : f'(x) = 0\} = 2$$

الجواب النهائي
الرسم البياني (3)

(3)

ب. تقاطعات المحورين

عامل x^2+1 لا يساوي صفرًا في الأعداد الحقيقية؛ الجذر صفر عند طرف المجال 1.5. قيمة $f(0)=\sqrt{3}$.

$$f(x) = (x^2 + 1)\sqrt{3 - 2x}$$

$$f(x) = 0 \iff 3 - 2x = 0$$

$$x = \frac{3}{2}$$

$$f(0) = \sqrt{3}$$

الجواب النهائي
تقاطعات المحورين

$$(3/2, 0), (0, \sqrt{3})$$

ج(1) • جميع النقاط القصوى

المقام $(2x-3)$ موجب داخل المجال. تتغير الإشارة عند $x=1/5$ من سالب إلى موجب وعند $x=1$ من موجب إلى سالب. الطرف $x=3/2$ أيضاً نهاية صغرى.

$$f'(x) = 2x\sqrt{3-2x} - \frac{x^2+1}{\sqrt{3-2x}}$$

$$f'(x) = \frac{2x(3-2x) - (x^2+1)}{\sqrt{3-2x}}$$

$$f'(x) = \frac{-5x^2+6x-1}{\sqrt{3-2x}} = \frac{-(5x-1)(x-1)}{\sqrt{3-2x}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{5}, 1$$

$$f(1/5) = \frac{26}{25} \sqrt{\frac{13}{5}}$$

$$f(1) = 2, f(3/2) = 0$$

الجواب النهائي

صغرى عند $1/5$ وعند الطرف $3/2$ ، وعظمى عند 1

$$(1/5, (26/25)\sqrt{13/5}); (1, 2); (3/2, 0)$$

ج(2) • مجالات الرتبة

المشتقة سالبة قبل $1/5$ ، موجبة بين $1/5$ و 1، وسالبة بين 1 و 1.5.

$$f'(x) < 0 \quad (x < 1/5)$$

$$f'(x) > 0 \quad (1/5 < x < 1)$$

$$f'(x) < 0 \quad (1 < x < 3/2)$$

الجواب النهائي

مجالات التصاعد والتنازل

$$(-\infty, 1/5) \downarrow, (1/5, 1) \uparrow, (1, 3/2) \downarrow$$

د • الرسم التقريبي

الدالة غير سالبة على مجالها، تنزل إلى صغرى موجبة عند $1/5$ ، تصعد إلى عظمى عند 1، وتنتهي عند $(1.5, 0)$.

$f(x) \geq 0$

$(0, \sqrt{3})$

$(1/5, (26/25)\sqrt{13/5})$

$(1, 2)$

$(3/2, 0)$

الجواب النهائي
معطيات الرسم

$(1, 2), \quad (3/2, 0)$

هـ . المساحة بين 'f والمحور

المنطقة المحصورة وحدها تقع بين جذري المشتقة $1/5$ و 1 ؛ قيمتها فرق ارتفاع f بينهما.

$$S = \int_{1/5}^1 f'(x) dx$$

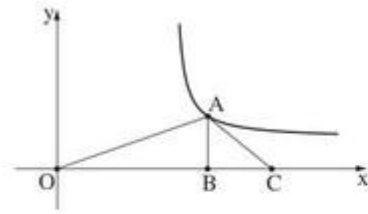
$$S = f(1) - f(1/5)$$

$$S = 2 - \frac{26}{25} \sqrt{\frac{13}{5}} \approx 0.323$$

الجواب النهائي
المساحة المحصورة

$$S = 2 - (26/25) \sqrt{13/5}$$

السؤال 8 · أصغر مساحة مثلث AOC



- النقطة O هي نقطة أصل المحاور .
 النقطة A تقع على الرسم البياني للدالة $f(x)$ في المجال $x > 4$.
 مرّروا من النقطة A عموداً على المحور x ، يقطعه في النقطة B .
 النقطة C تقع على المحور x عن يمين النقطة B .
 معطى أنّ : $OB = 2 \cdot BC$.
 نرمز بـ t إلى الإحداثي x للنقطة A .
 أ. (1) عبّروا بدلالة t عن طول القطعة OC .
 (2) عبّروا بدلالة t عن مساحة المثلث AOC .
 ب. جدّوا قيمة t التي بالنسبة لها مساحة المثلث AOC هي أقل ما يمكن .

בהצלחה!

נשמתי לכם התבונן!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל.
 אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך.
 حقوق الطبع محفوظة لدولة إسرائيل.
 النسخ أو النشر ممنوعان إلا بإذن من وزارة التربية والتعليم.

05

أ(1) · طول OC

$OB=t$ لأن $B=(t,0)$ ، ومعطى $OB=2BC$ ؛ إذاً $BC=t/2$ ، و C على يمين B.

$$OB = t$$

$$BC = \frac{OB}{2} = \frac{t}{2}$$

$$OC = OB + BC = t + \frac{t}{2} = \frac{3t}{2}$$

الجواب النهائي
 طول OC

$$OC = 3t/2$$

أ(2) · مساحة AOC

$t > 4$ ، لذلك $f(t) > 0$ ، وطول العمود $AB=f(t)$.

$$f(t) = \frac{t-3}{t-4} = 1 + \frac{1}{t-4}$$

$$S(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3t}{2} \cdot \frac{t-3}{t-4}$$

$$S(t) = \frac{3t(t-3)}{4(t-4)} = \frac{3}{4} \left(t + \frac{t}{t-4} \right)$$

الجواب النهائي
 مساحة AOC بدلالة t

$$S(t) = 3t(t-3)/(4(t-4))$$

ب . قيمة t للأصغر

تنقلب إشارة المشتقة من سالب إلى موجب عند $t=6$ ؛ ومع الاقتراب من 4 أو اللانهاية تكبر المساحة.

$$S'(t) = \frac{3}{4} \left(1 - \frac{4}{(t-4)^2} \right)$$

$$S'(t) = 0 \implies (t-4)^2 = 4$$

$$t > 4 \implies t-4 = 2 \implies t = 6$$

$$S(6) = \frac{3(6)(6-3)}{4(6-4)} = \frac{54}{8} = \frac{27}{4}$$

الجواب النهائي
قيمة t ومساحة المثلث الصغرى

$$t = 6, \quad S_{\min} = 27/4$$