

حلول امتحان البجروت 35471

صيف 2025 · الموعد أ · النموذج العربي الرسمي · النسخة أ

حلول عربية مفصلة، مع فصل الجواب النهائي عن خطوات الحساب.

حلول تعليمية أصلية وليست حلولاً رسمية للوزارة.

حقوق النشر والطباعة | mathbagrut.com

© 2026 mathbagrut.com — حقوق الشرح والحلول والتصميم محفوظة. الطباعة التعليمية الشخصية أو الصفية مسموحة مع إبقاء

اسم الموقع. إعادة النشر أو البيع تحتاج إذناً خطياً.

نص السؤال من امتحان وزارة التربية والتعليم؛ حقوق النص الأصلي والرسوم للوزارة. الحلول تعليمية مستقلة وليست حلاً رسمياً.

السؤال 1 • التوزيع الطبيعي للقفز الطويل والعالي

أجبوا عن خمسة من الأسئلة 1-8، عن سؤال واحد على الأقل من كل فصل. (لكل سؤال – 20 درجة.)
انتبهوا: إذا أجبتكم عن أكثر من خمسة أسئلة، تُفحص فقط الإجابات الخمس الأولى التي في دفتركم.

الفصل الأول – الإحصاء والاحتمال

1. في مدرسة معينة، أُجريت منافسة في القفز الطويل. النتائج التي حققها المشاركون في المنافسة توزعت طبيعيًا. معدل مسافات القفزات كان 4.6 متر.
69.2% من المشاركين قفزوا إلى مسافة أقل من 4.8 متر.
أ. جدوا الانحراف المعياري لمسافة القفز.
المشاركون الذين مسافة قفزهم كانت أكبر من 5.24 متر، حازوا على ميدالية.
ب. ما هي النسبة المئوية للمشاركين الذين حازوا على ميدالية؟
معطى أن 11 مشاركًا حازوا على ميدالية.
ج. حسب جدول التوزيع الطبيعي، كم مشاركًا تنافس في القفز الطويل؟
أُجريت في المدرسة أيضًا منافسة في القفز العالي. في هذه المنافسة أيضًا، النتائج التي حققها المشاركون توزعت طبيعيًا.
معدل ارتفاعات القفزات كان 1.5 متر، والانحراف المعياري كان 0.2 متر.
شارك أمير في المنافستين. نتيجة أمير في القفز الطويل كانت 5 أمتار، وفي القفز العالي 1.75 متر.
د. في أي من المنافستين، القفز الطويل أم القفز العالي، كان ترتيب نتيجة أمير في مكان أعلى بالمقارنة مع المشاركين الآخرين؟ عللوا إجابتكم.

/يتبع في صفحة 3/

أ • الانحراف المعياري للقفز الطويل

مساحة 0.692 يسار 4.8 تقابل $z \approx 0.50$ ؛ المعدل 4.6.

$$P(X < 4.8) = 0.692$$

$$P(Z < 0.50) \approx 0.692$$

$$\frac{4.8 - 4.6}{\sigma} = 0.50$$

$$\sigma = \frac{0.2}{0.5} = 0.4$$

الجواب النهائي الانحراف المعياري

$$\sigma = 0.4 \text{ m}$$

ب . نسبة الفائزين بميدالية

نعيّر الحد ثم نأخذ متمم المساحة اليسرى من الجدول.

$$z = \frac{5.24 - 4.6}{0.4} = 1.60$$

$$P(X > 5.24) = 1 - \Phi(1.60) = 1 - 0.9452 = 0.0548$$

$$0.0548 \cdot 100\% = 5.48\%$$

الجواب النهائي نسبة الحاصلين على ميدالية

$$5.48\%$$

ج . عدد المشاركين

نسبة الجدول 5.48% تُعرض في السؤال المدرسي إلى أقرب عُشر مئوي 5.5%؛ نستخدم التقريب نفسه مع العدد الصحيح 11.

$$5.48\% \approx 5.5\% = 0.055$$

$$0.055N = 11$$

$$N = \frac{11}{0.055} = 200$$

$$200(0.0548) = 10.96 \approx 11$$

الجواب النهائي عدد المشاركين تقريباً

$$N \approx 200$$

د . ترتيب أمير

الترتيب الأعلى بين المشاركين يقابل علامة معيارية أكبر، لأن كلا التوزيعين طبيعيان.

$$z_{\text{long}} = \frac{5 - 4.6}{0.4} = 1$$

$$z_{\text{high}} = \frac{1.75 - 1.5}{0.2} = 1.25$$

$$1.25 > 1$$

الجواب النهائي ترتيبه أعلى في القفز العالي

$$z_{\text{high}} = 1.25 > z_{\text{long}} = 1$$

السؤال 2 . مساحة الشقق وسعرها

معين (المتغير x) وبين السعر الذي يبيع به هذه الشقق (المتغير y) . في الجدول الذي أمامكم تظهر معطيات 5 شقق فحسبها السمسار .

مساحة الشقة (m^2) المتغير x	سعر الشقة (بملايين الشواكل) المتغير y
80	1
88	1.8
96	2.7
110	3.4
116	4.6

- أ. (1) جدوا معدل مساحات الشقق .
(2) جدوا الانحراف المعياري لمساحة الشقق .
ب. حسب السمسار المعدل والانحراف المعياري للمتغير y ، ووجد أن $\bar{y} = 2.7$ ، $S_y = 1.249$.
ج. جدوا معامل التناسب r بين المتغيرين .
د. جدوا معادلة مستقيم الانحدار للتنبؤ بـ y حسب x .
هـ. حسب مستقيم الانحدار ، ما هو التنبؤ بسعر شقة مساحتها 100 m^2 ؟
في أعقاب ارتفاع الأسعار في الحقل الاقتصادي ، ازداد سعر كل شقة بـ 0.2 مليون شيكل .
ح. حدّدوا بالنسبة لكل واحد من المؤشّرين (1)–(2) اللّذين أمامكم ، هل كُبرت قيمته أم صُغرت أم لم تتغير . علّلوا تحديديكم .
(1) الانحراف المعياري للمتغير y .
(2) معامل التناسب r .

يتبع في صفحة 4 /

أ(1) . معدل المساحات

كل مساحة بالمتر المربع ؛ نقسم المجموع على عدد الشقق .

$$\bar{x} = \frac{80 + 88 + 96 + 110 + 116}{5} = \frac{490}{5} = 98$$

الجواب النهائي
معدل المساحات

$$\bar{x} = 98 m^2$$

أ(2) . انحراف المساحات

نحسب التباين بقسمة مجموع مربعات الانحرافات على خمسة ثم نأخذ الجذر.

$$s_x^2 = \frac{(80 - 98)^2 + (88 - 98)^2 + (96 - 98)^2 + (110 - 98)^2 + (116 - 98)^2}{5}$$

$$s_x^2 = \frac{324 + 100 + 4 + 144 + 324}{5} = \frac{896}{5} = 179.2$$

$$s_x = \sqrt{179.2} \approx 13.387$$

الجواب النهائي
الانحراف المعياري

$$s_x \approx 13.387 \text{ m}^2$$

ب . معامل الارتباط

معدل y المعطى 2.7 وانحرافه 1.249؛ نستخدم الأزواج التي في الجدول.

$$\text{Cov}(x, y) = \frac{(-18)(-1.7) + (-10)(-0.9) + (-2)(0) + (12)(0.7) + (18)(1.9)}{5}$$

$$\text{Cov}(x, y) = \frac{30.6 + 9 + 0 + 8.4 + 34.2}{5} = 16.44$$

$$r = \frac{16.44}{\sqrt{179.2}(1.249)} \approx 0.9833$$

الجواب النهائي
معامل الارتباط

$$r \approx 0.983$$

ج . معادلة الانحدار

الانحدار للتنبؤ بسعر y من المساحة x يمر بالنقطة (98, 2.7).

$$b = \frac{16.44}{179.2} \approx 0.0917411$$

$$\hat{y} - 2.7 = b(x - 98)$$

$$\hat{y} = 0.0917411x - 6.29063$$

الجواب النهائي
مستقيم الانحدار بملايين الشواكل

$$\hat{y} = 2.7 + \frac{16.44}{179.2}(x - 98)$$

د • شقة مساحتها 100

نكتب الزيادة عن معدل المساحات، وهي متران مربعان.

$$\hat{y}(100) = 2.7 + \frac{16.44}{179.2}(100 - 98)$$

$$\hat{y}(100) = 2.7 + 0.183482 \approx 2.88348$$

الجواب النهائي
السعر المتوقع بملايين الشواكل

$$\hat{y}(100) \approx 2.8835$$

هـ(1) • أثر الإضافة على s_y

الزيادة ثابتة، فتبقى فروق كل قيمة عن المعدل مساوية لفروقها الأصلية.

$$y_i^{\text{new}} = y_i + 0.2$$

$$\bar{y}_{\text{new}} = \bar{y} + 0.2$$

$$y_i^{\text{new}} - \bar{y}_{\text{new}} = y_i - \bar{y}$$

$$s_{y,\text{new}} = s_y = 1.249$$

الجواب النهائي
لم يتغير الانحراف المعياري

$$s_{y,\text{new}} = s_y$$

هـ(2) • أثر الإضافة على r

إضافة ثابت إلى y لا تغير التغير ولا s_y ، ومن ثم لا تغير معامل الارتباط.

$$\text{Cov}(x, y + 0.2) = \text{Cov}(x, y)$$

$$s_{y+0.2} = s_y$$

$$r_{\text{new}} = r$$

الجواب النهائي
لم يتغير معامل الارتباط

$$r_{\text{new}} = r$$

السؤال 3 • تطوع الأولاد والبنات

- في الطبقة يتطوعون والبقية لا يتطوعون .
75% من طلاب الطبقة يتطوعون .
 $\frac{3}{5}$ الطلاب الذين يتطوعون هم بنات .
معطى أن عدد البنات اللواتي يتطوعن هو 3 أضعاف عدد البنات اللواتي لا يتطوعن .
أ. ما هو الاحتمال بأن يختاروا بشكل عشوائي من الطبقة بنتاً تتطوع ؟
ب. جدوا النسبة المئوية للأولاد في الطبقة .
يختارون بشكل عشوائي طالباً من الطبقة .
ج. معلوم أن الطالب الذي اختير هو ولد . ما هو الاحتمال بأنه يتطوع ؟
في تقرير أعدته لجريدة الطبقة، كتبت دانا :
"النسبة المئوية للمتطوعات من بين البنات في الطبقة هي أكبر من النسبة المئوية للمتطوعين من بين الأولاد في الطبقة" .
د. هل الجملة التي كتبتها دانا صحيحة ؟ عللوا إجابتكم .

/يتبع في صفحة 5/

أ • احتمال بنت متطوعة

ثلاثة أنحاس المتطوعين بنات، والمتطوعون ثلاثة أرباع الطبقة.

الجنس / التطوع متطوع غير متطوع المجموع

بنات 0.45 0.15 0.60

أولاد 0.30 0.10 0.40

المجموع 0.75 0.25 1

$$P(V) = 0.75$$

$$P(G | V) = \frac{3}{5}$$

$$P(G \cap V) = P(V)P(G | V) = 0.75 \cdot \frac{3}{5} = 0.45$$

الجواب النهائي
احتمال بنت متطوعة

$$P(G \cap V) = 0.45$$

ب . نسبة الأولاد

عدد البنات المتطوعات ثلاثة أضعاف غير المتطوعات، لذا الجزء غير المتطوع 0.45/3.

الجنس / التطوع متطوع غير متطوع المجموع

بنات 0.45 0.15 0.60

أولاد 0.30 0.10 0.40

المجموع 0.75 0.25 1

$$P(G \cap \bar{V}) = \frac{0.45}{3} = 0.15$$

$$P(G) = 0.45 + 0.15 = 0.60$$

$$P(B) = 1 - 0.60 = 0.40$$

الجواب النهائي
نسبة الأولاد

40%

ج . تطوع الولد المختار

المتطوعون إجمالاً 0.75؛ نطرح المتطوعات 0.45.

الجنس / التطوع متطوع غير متطوع المجموع

0.60	0.15	0.45	بنات
0.40	0.10	0.30	أولاد
1	0.25	0.75	المجموع

$$P(B \cap V) = 0.75 - 0.45 = 0.30$$

$$P(V | B) = \frac{P(B \cap V)}{P(B)} = \frac{0.30}{0.40} = 0.75$$

الجواب النهائي
احتمال تطوع ولد

$$P(V | B) = 0.75$$

د ٠ فحص قول دانا

حصه المتطوعات بين البنات 0.45/0.60، وحصه المتطوعين بين الأولاد 0.30/0.40.

الجنس / التطوع متطوع غير متطوع المجموع

بنات 0.45 0.15 0.60

أولاد 0.30 0.10 0.40

المجموع 0.75 0.25 1

$$P(V | G) = \frac{0.45}{0.60} = 0.75$$

$$P(V | B) = \frac{0.30}{0.40} = 0.75$$

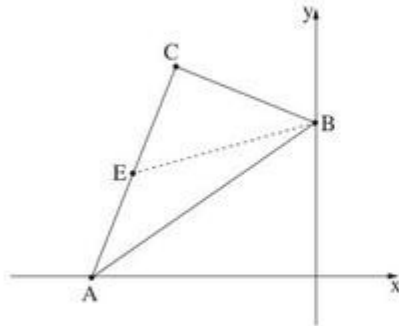
$$P(V | G) = P(V | B)$$

الجواب النهائي

قول دانا غير صحيح؛ النسبتان متساويتان

$$75\% = 75\%$$

السؤال 4 . مثلث قائم ومتوسط في هيئة محاور



4. في الرسم الذي أمامكم المثلث القائم الزاوية ABC ($\angle ACB = 90^\circ$) .

الرأس B يقع على المحور y .

معطى أن إحداثيات الرأس A هي $(-16, 0)$ ،

ومعادلة الضلع CB هي $y = -\frac{2}{5}x + 11$.

أ. جدوا معادلة الضلع AC .

ب. جدوا إحداثيات الرأس C .

BE هو مستقيم متوسط للضلع AC .

ج. (1) جدوا طول القطعة EC .

(2) جدوا مقدار الزاوية CEB .

النقطة K تقع على القطعة EB .

معطى أن: مساحة المثلث AEK هي 18 .

د. جدوا طول القطعة EK .

أ . معادلة AC

ميل CB هو $-\frac{2}{5}$ ، لذا ميل AC العمودي عليه $\frac{5}{2}$ ؛ تمر AC بالرأس A .

$$m_{CB} = -\frac{2}{5}$$

$$m_{AC} = \frac{5}{2}$$

$$y - 0 = \frac{5}{2}(x + 16)$$

$$y = \frac{5}{2}x + 40$$

الجواب النهائي
معادلة AC

$$y = \frac{5x}{2} + 40$$

ب . الرأس C

نجمع $\frac{2x}{5}$ مع $\frac{5x}{2}$ بعد مساواة قيمتي y .

$$\frac{5}{2}x + 40 = -\frac{2}{5}x + 11$$

$$\left(\frac{5}{2} + \frac{2}{5}\right)x = -29$$

$$\frac{29}{10}x = -29$$

$$x_C = -10, \quad y_C = \frac{5}{2}(-10) + 40 = 15$$

الجواب النهائي
إحداثيات الرأس C

$$C = (-10, 15)$$

ج(1) · طول EC

نجد طول AC من فرق الإحداثيات ثم نقسمه على اثنين.

$$AC = \sqrt{(-10 + 16)^2 + (15 - 0)^2}$$

$$AC = \sqrt{36 + 225} = \sqrt{261} = 3\sqrt{29}$$

$$EC = \frac{AC}{2} = \frac{3\sqrt{29}}{2}$$

الجواب النهائي
طول EC

$$EC = 3\sqrt{29}/2$$

ج(2) · الزاوية CEB

منتصف AC هو E=(-13,7.5)، وB=(0,11) لأنه تقاطع CB مع محور y.

$$E = \left(\frac{-16 - 10}{2}, \frac{0 + 15}{2} \right) = (-13, 7.5)$$

$$\vec{EC} = (3, 7.5), \quad \vec{EB} = (13, 3.5)$$

$$\vec{EC} \cdot \vec{EB} = 3(13) + 7.5(3.5) = 65.25$$

$$|EC| = \frac{3\sqrt{29}}{2}, \quad |EB| = \frac{5\sqrt{29}}{2}$$

$$\cos \angle CEB = \frac{65.25}{(3\sqrt{29}/2)(5\sqrt{29}/2)} = \frac{3}{5}$$

$$\angle CEB \approx 53.130^\circ$$

الجواب النهائي
مقدار الزاوية

$$\angle CEB \approx 53.13^\circ$$

د · طول EK

K على EB؛ للمثلثين AEK وAEB القاعدة AE نفسها، والارتفاع يتناسب خطياً مع EK/EB.

$$S_{AEB} = \frac{1}{2} |3(11) - 7.5(16)| = \frac{87}{2} = 43.5$$

$$\frac{EK}{EB} = \frac{S_{AEK}}{S_{AEB}} = \frac{18}{43.5} = \frac{12}{29}$$

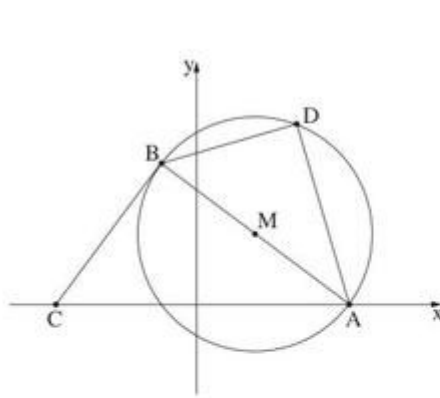
$$EB = \sqrt{13^2 + 3.5^2} = \frac{5\sqrt{29}}{2}$$

$$EK = \frac{12}{29} \cdot \frac{5\sqrt{29}}{2} = \frac{30}{\sqrt{29}}$$

الجواب النهائي
EK طول

$$EK = 30/\sqrt{29}$$

السؤال 5 · دائرة وقطر ومماس



5. في الرسم الذي أمامكم دائرة مركزها M .
 الدائرة تقطع الجزء الموجب للمحور x في النقطة A .
 النقطة B تقع على محيط الدائرة بحيث AB هو قطر في الدائرة .
 مرّروا عبر النقطة B مماساً للدائرة، يقطع المحور x في النقطة C .
 معطى أنّ معادلة الدائرة هي $(x - 5)^2 + (y - 6)^2 = 100$.
 أ. جدوا إحداثيات النقطة A .
 ب. جدوا معادلة المماس BC .
 ج. جدوا طول الضلع AC .
 النقطة D تقع على محيط الدائرة بحيث AB يُنصف الزاوية DAC .
 د. (1) قسروا لماذا $\angle ADB = 90^\circ$.
 (2) برهنوا أنّ: $\triangle ABC \sim \triangle ADB$.
 هـ. جدوا بكم ضعفاً مساحة المثلث ABC هي أكبر من مساحة المثلث ADB .

/ يتبع في صفحة 6 /

أ · إحداثيات A

للدائرة تقاطعان مع محور x ؛ A هو الواقع في الجزء الموجب.

$$(x - 5)^2 + (0 - 6)^2 = 100$$

$$(x - 5)^2 = 64$$

$$x = 5 \pm 8 = 13 \text{ or } -3$$

$$x_A = 13$$

الجواب النهائي
إحداثيات A

$$A = (13, 0)$$

ب · معادلة المماس BC

M منتصف AB ، ولذلك $B = 2M - A$. ميل MB هو $-3/4$ ، وميل المماس العمودي عليه $4/3$.

$$M = (5, 6)$$

$$B = 2M - A = (10, 12) - (13, 0) = (-3, 12)$$

$$m_{MB} = \frac{12 - 6}{-3 - 5} = -\frac{3}{4}$$

$$m_{BC} = \frac{4}{3}$$

$$y - 12 = \frac{4}{3}(x + 3)$$

$$y = \frac{4}{3}x + 16$$

الجواب النهائي
معادلة المماس

$$y = 4x/3 + 16$$

ج . طول AC

نضع $y=0$ ؛ ثم نطرح إحداثي x للنقطتين على المحور.

$$0 = \frac{4}{3}x_C + 16$$

$$x_C = -12$$

$$AC = 13 - (-12) = 25$$

الجواب النهائي
طول AC

$$AC = 25$$

د(1) . لماذا ADB قائمة؟

الزاوية ADB زاوية محيطية تحصر القطر AB؛ الزاوية المركزية المقابلة مستقيمة 180° .

$$\angle AMB = 180^\circ$$

$$\angle ADB = \frac{1}{2}(180^\circ) = 90^\circ$$

الجواب النهائي
الزاوية قائمة

$$\angle ADB = 90^\circ$$

د(2) . تشابه المثلثين

في AB : قطر BC مماس عند B ، فيكون ABC قائماً عند B ؛ و ADB قائم عند D . المعطى أن AB ينصف AC ، لذا الزاويتان عند A متساويتان.

$$AB \perp BC \implies \angle ABC = 90^\circ$$

$$\angle ADB = 90^\circ$$

$$\angle BAC = \angle DAB$$

$$\triangle ABC \sim \triangle ADB \quad (AA)$$

$$\triangle ABC \sim \triangle ADB$$

هـ . نسبة المساحتين

في التشابه يقابل وتر ABC وهو AC وتر ADB وهو AB؛ وطول AB هو قطر الدائرة 20.

$$AB = 2R = 20$$

$$AC = 25$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ADB}} = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ADB}} = \left(\frac{25}{20}\right)^2 = \frac{25}{16}$$

الجواب النهائي

المساحة الأولى أكبر بـ 25/16 ضعفاً

$$S_{ABC}/S_{ADB} = 25/16$$

السؤال 6 • بحث دالة كسرية ومشتقتها

وللدوال النسبية وللدوال الجذر

6. معطاة الدالة $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 + 1} + 1$ ، المعرّفة لكل x .

أ. جدوا معادلة خط التقارب الموازي للمحور x ، للدالة $f(x)$.

ب. (1) جدوا إحداثيات النقطة القصوى للدالة $f(x)$ ، وحددوا نوع هذه النقطة .

(2) اكتبوا مجالات تصاعد وتنازل الدالة $f(x)$.

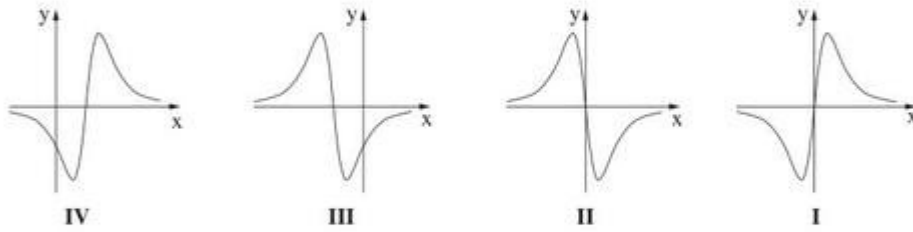
ج. جدوا إحداثيات نقاط تقاطع الرسم البياني للدالة $f(x)$ مع المحور x .

د. ارسموا رسماً بيانياً تقريبياً للدالة $f(x)$.

هـ. (1) حددوا أيّاً من الرسوم البيانية IV-I التي أمامكم يصف دالة المشتقة $f'(x)$ ، علّلوا تحديدكم .

(2) احسبوا المساحة المحصورة بين الرسم البياني لدالة المشتقة $f'(x)$ والمحور x

والمستقيمين $x = 2$ و $x = -2$.



المتبع في صفحة 7

أ • خط التقارب الأفقي

درجتا البسط والمقام متساويتان؛ بعد إضافة الواحد يصبح حد اللانهاية 2.

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 + 1} + 1$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 1 - 10}{x^2 + 1} + 1 = 2 - \frac{10}{x^2 + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2$$

الجواب النهائي
خط التقارب الأفقي

$$y = 2$$

ب(1) • النقطة القصوى

المقام موجب لكل x ؛ تتغير إشارة المشتقة $20x/(x^2+1)^2$ من سالب إلى موجب عند الصفر.

$$f'(x) = \frac{20x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \implies x = 0$$

$$f(0) = 2 - \frac{10}{1} = -8$$

الجواب النهائي
نهاية صغرى

$$(0, -8)$$

ب(2) • مجالات الرتبة

مربع المقام موجب على المجال كله.

$$f'(x) < 0 \quad (x < 0)$$

$$f'(x) = 0 \quad (x = 0)$$

$$f'(x) > 0 \quad (x > 0)$$

الجواب النهائي

تتنازل في المجال الأول وتتصاعد في الثاني

$$(-\infty, 0), \quad (0, \infty)$$

ج • تقاطعات x

بعد الضرب في مقام موجب نحصل على $x^2=4$.

$$2 - \frac{10}{x^2 + 1} = 0$$

$$2(x^2 + 1) = 10$$

$$x^2 + 1 = 5$$

$$x^2 = 4$$

$$x = -2 \text{ or } x = 2$$

الجواب النهائي
نقطتا التقاطع

$(-2, 0), (2, 0)$

د. الرسم التقريبي

الدالة زوجية؛ الفرعان متناظران حول محور y ويتجهان إلى المستقيم $y=2$ من أسفل، وفي المركز $(0, -8)$.

$$f(-x) = f(x)$$

$$y = 2$$

$$(-2, 0), (0, -8), (2, 0)$$

الجواب النهائي
معطيات الرسم

$(-2, 0), (0, -8), (2, 0)$

هـ (1). رسم f' الصحيح

المشتقة سالبة يسار الصفر وموجبة يمينه، تساوي صفرًا عند الصفر، وتقترب من محور x في الطرفين؛ هذا وصف الرسم I.

$$f'(0) = 0$$

$$f'(x) < 0 \quad (x < 0)$$

$$f'(x) > 0 \quad (x > 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f'(x) = 0$$

الجواب النهائي
الرسم البياني I

I

هـ(2) . المساحة بين المشتقة ومحور x

f' سالبة بين -2 و 0 وموجبة بين 0 و 2؛ التكامل الهندسي يُحسب بالقيم المطلقة.

$$S = - \int_{-2}^0 f'(x) dx + \int_0^2 f'(x) dx$$

$$S = f(-2) - f(0) + f(2) - f(0)$$

$$f(-2) = 0, \quad f(2) = 0, \quad f(0) = -8$$

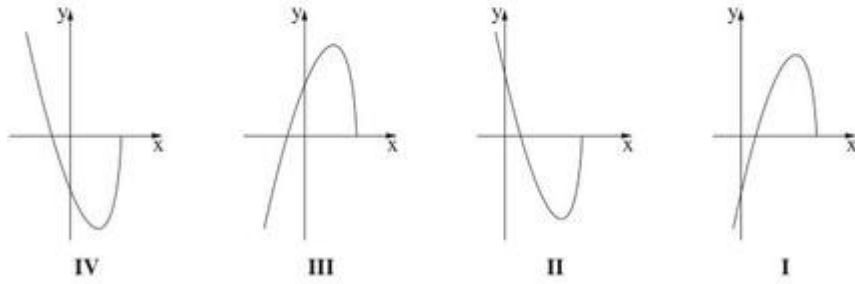
$$S = 0 - (-8) + 0 - (-8) = 16$$

الجواب النهائي
المساحة المطلوبة

$$S = 16$$

السؤال 7 • دالة جذر وإزاحة أفقية

- جدوا مجال تعريف الدالة $f(x)$.
 - جدوا إحداثيات نقاط تقاطع الرسم البياني للدالة $f(x)$ مع المحورين.
 - جدوا إحداثيات جميع النقاط القصوى للدالة $f(x)$ ، وحددوا نوع هذه النقاط.
 - ارسموا رسماً بيانياً تقريبياً للدالة $f(x)$.
- معطاة الدالة $g(x) = f(x + 6)$ ، المعروفة في المجال $x \leq 9$.
- حددوا أيًا من الرسوم البيانية I–IV التي أمامكم يصف الدالة $g(x)$. علّلوا تحديدكم.
 - ما هي إحداثيات النقطة القصوى الداخلية للدالة $g(x)$ ؟



أ • مجال التعريف

نستبعد ما فوق 15؛ الطرف نفسه مقبول.

$$f(x) = (3x - 9)\sqrt{15 - x}$$

$$15 - x \geq 0$$

$$x \leq 15$$

الجواب النهائي
مجال التعريف

$$D_f = (-\infty, 15]$$

ب • تقاطعات المحورين

عامل $3x - 9$ يعطي $x = 3$ ، وعامل الجذر يعطي الطرف $x = 15$ ؛ قيمة الدالة عند الصفر سالبة.

$$f(x) = 0 \implies 3x - 9 = 0 \text{ or } 15 - x = 0$$

$$x = 3 \text{ or } x = 15$$

$$f(0) = -9\sqrt{15}$$

الجواب النهائي
تقاطعات المحورين

$$(3, 0), (15, 0), (0, -9\sqrt{15})$$

ج . نقاط قصوى

داخل المجال $x < 15$ ، إشارة المشتقة يحكمها $x - 11$ ؛ عظمى داخلية عند 11، وطرف أيمن عند 15.

$$f'(x) = 3\sqrt{15-x} - \frac{3x-9}{2\sqrt{15-x}}$$

$$f'(x) = \frac{6(15-x) - (3x-9)}{2\sqrt{15-x}}$$

$$f'(x) = \frac{99-9x}{2\sqrt{15-x}} = \frac{9(11-x)}{2\sqrt{15-x}}$$

$$f(11) = (33-9)\sqrt{4} = 48$$

$$f(15) = 0$$

الجواب النهائي

عظمى داخلية عند 11 وصغرى طرفية عند 15

(11, 48), (15, 0)

د . رسم f

من اليسار تتزايد الدالة، تقطع x عند 3، تبلغ (11, 48) وتعود إلى الطرف (15, 0).

$$f'(x) > 0 \quad (x < 11)$$

$$f'(x) < 0 \quad (11 < x < 15)$$

$$(3, 0), (11, 48), (15, 0)$$

الجواب النهائي

معطيات الرسم

(11, 48), (15, 0)

هـ (1) . رسم $g=f(x+6)$

المجال الجديد $x \leq 9$ ، والجذران -3 و 9، ونقطة النهاية العظمى الجديدة عند $x=5$ ؛ الرسم III يحقق ذلك.

$$g(x) = f(x+6)$$

$$x+6 \leq 15 \implies x \leq 9$$

$$x = -3, \quad x = 9$$

$$(11-6, 48) = (5, 48)$$

الجواب النهائي

الرسم البياني III

III

هـ(2) . النهاية العظمى لـg

الإزاحة أفقية ولا تغير قيمة y القصوى.

$$x_g = 11 - 6 = 5$$

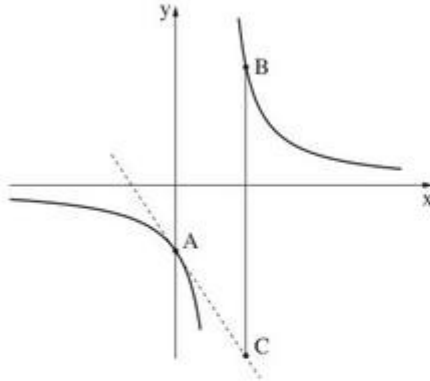
$$y_g = 48$$

الجواب النهائي
النقطة القصوى الداخلية

(5, 48)

السؤال 8 · مماس الدالة وطول قطعة عمودية

8. الرسم الذي أمامكم يصف الرسم البياني للدالة $f(x) = \frac{a}{x-2}$ ، المعرفة في المجال $x \neq 2$.
 a هو پارامتر لا يساوي 0.



النقطة A هي نقطة تقاطع الرسم البياني للدالة $f(x)$ مع المحور y .
 مررنا عبر النقطة A مماساً للرسم البياني للدالة $f(x)$.
 معطى أن ميل المماس هو -1.5.
 أ. جدوا قيمة a .

عوضوا $a=6$ في الدالة $f(x)$ ، وأجيبوا عن البندين "ب-ج".
 ب. جدوا معادلة المماس.

النقطة B تقع على الرسم البياني للدالة $f(x)$ ، في المجال $x > 2$.
 النقطة C تقع على المماس بحيث القطعة BC توازي المحور y .
 نرسم t إلى الإحداثي x للنقطة B.

ج. (1) عبروا بدلالة t عن طول القطعة BC.

(2) جدوا قيمة t التي بالنسبة لها طول القطعة BC هو أصغر ما يمكن.

בהצלחה!

נשמח לכם הצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל.

אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך.

חقوق الطبع محفوظة לדولة إسرائيل.

النسخ أو النشر ممنوعان إلا بإذن من وزارة التربية والتعليم.

05

أ · البارامتر a

النقطة A على محور y ، وميل المماس هو قيمة المشتقة عند صفر.

$$f(x) = \frac{a}{x-2}$$

$$f'(x) = -\frac{a}{(x-2)^2}$$

$$f'(0) = -\frac{a}{4} = -1.5$$

$$a = 6$$

الجواب النهائي
 قيمة البارامتر

$$a = 6$$

ب · معادلة المماس

بعد التعويض $a=6$ نحصل على $A=(0,-3)$.

$$f(0) = \frac{6}{-2} = -3$$

$$y - (-3) = -1.5(x - 0)$$

$$y = -1.5x - 3$$

الجواب النهائي
معادلة المماس

$$y = -1.5x - 3$$

ج(1) · طول BC بدلالة t

ل $t > 2$ النقطة B فوق محور x، والمماس عند $x=t$ تحته.

$$B = \left(t, \frac{6}{t-2}\right)$$

$$C = (t, -1.5t - 3)$$

$$BC = y_B - y_C = \frac{6}{t-2} + 1.5t + 3$$

الجواب النهائي
طول BC

$$BC(t) = 6/(t-2) + 1.5t + 3$$

ج(2) · أقصر BC

المشتقة سالبة أولاً ثم موجبة بعد $t=4$ ؛ لذا طول القطعة أصغر عند $t=4$.

$$BC'(t) = -\frac{6}{(t-2)^2} + 1.5$$

$$BC'(t) = 0 \implies (t-2)^2 = \frac{6}{1.5} = 4$$

$$t > 2 \implies t-2 = 2 \implies t = 4$$

$$BC(4) = \frac{6}{2} + 1.5(4) + 3 = 12$$

الجواب النهائي
موضع أقصر قطعة

$$t = 4, \quad BC_{\min} = 12$$