

حلول امتحان البجروت 35471

شتاء 2024 · ترجمة تعليمية غير رسمية · النسخة أ

حلول عربية مفصلة، مع فصل الجواب النهائي عن خطوات الحساب.

حلول تعليمية أصلية وليست حلولاً رسمية للوزارة.

حقوق النشر والطباعة | mathbagrut.com

© 2026 mathbagrut.com — حقوق الشرح والحلول وتصميم الملف محفوظة. يُسمح بالطباعة التعليمية الشخصية أو الصفية مع إبقاء

اسم الموقع. إعادة النشر أو البيع تحتاج إذناً خطياً.

شتاء 2024: نص السؤال ترجمة تعليمية غير رسمية للامتحان العبري. حقوق نص الامتحان الأصلي لوزارة التربية والتعليم؛ وعند

الاختلاف يُعتمد النص العبري الرسمي.

السؤال 1 . التوزيع الطبيعي لأوزان المواليد

1. الفصل الأول - إحصاء واحتمال

- يُتوزع أوزان الأطفال الذين يولدون في مدينة معينة توزيعاً طبيعياً. معطى أن متوسط أوزانهم 3.4 كغم. 96.41% من الأطفال في هذه المدينة يولدون بوزن أقل من 5.02 كغم.
- أ. جدوا الانحراف المعياري لأوزان الأطفال الذين يولدون في هذه المدينة. وُلد أوري في هذه المدينة بوزن أقل من أوزان 9% من الأطفال الذين يولدون فيها.
- ب. جدوا الوزن الذي وُلد به أوري. وزن أقل من 1.5 كغم يُعدّ وزناً منخفضاً جداً للمولود.
- ج. (1) ما هي النسبة المئوية للأطفال الذين يولدون بوزن منخفض جداً في هذه المدينة؟ (2) في سنة معينة وُلد 20,000 طفل في المدينة. حسب جدول التوزيع الطبيعي، كم منهم وُلد بوزن منخفض جداً؟
- وُلد شاحر في مدينة أخرى بالوزن نفسه الذي وُلد به أوري. يتوزع أوزان الأطفال في مدينة شاحر توزيعاً طبيعياً بانحراف معياري 0.8.
- لوزني ولادة شاحر وأوري العلامة المعيارية نفسها.
- د. جدوا متوسط أوزان الأطفال في المدينة التي وُلد فيها شاحر.

أ . الانحراف المعياري

من جدول التوزيع الطبيعي: المساحة 0.9641 يسار العلامة المعيارية 1.8. نعوّض المعدل والوزن ثم نحل الانحراف المعياري.

$$P(X < 5.02) = 0.9641 \implies z = 1.8$$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$1.8 = \frac{5.02 - 3.4}{\sigma} = \frac{1.62}{\sigma}$$

$$1.8\sigma = 1.62$$

$$\sigma = \frac{1.62}{1.8} = 0.9$$

الجواب النهائي
الانحراف المعياري للأوزان

$$\sigma = 0.9 \text{ kg}$$

ب . وزن أوري

بما أن 9% فقط أثقل منه، تقع 91% إلى يسار وزنه. يقابل 0.91 في الجدول $z \approx 1.34$.

$$P(X > x_{\text{Uri}}) = 0.09$$

$$P(X < x_{\text{Uri}}) = 1 - 0.09 = 0.91$$

$$z \approx 1.34$$

$$\frac{x_{\text{Uri}} - 3.4}{0.9} = 1.34$$

$$x_{\text{Uri}} - 3.4 = 1.34 \cdot 0.9 = 1.206$$

$$x_{\text{Uri}} = 3.4 + 1.206 = 4.606$$

الجواب النهائي

وزن أوري

$$x_{\text{Uri}} \approx 4.606 \text{ kg}$$

ج(1) · نسبة الوزن المنخفض جدًا

نحسب العلامة المعيارية ونقرأ مساحة الذيل الأيسر من جدول التوزيع الطبيعي.

$$z = \frac{1.5 - 3.4}{0.9} = \frac{-1.9}{0.9} \approx -2.11$$

$$P(X < 1.5) = P(Z < -2.11) \approx 0.0174$$

$$0.0174 \cdot 100\% = 1.74\%$$

الجواب النهائي

النسبة المئوية المطلوبة

$$P(X < 1.5) \approx 1.74\%$$

ج(2) · العدد بين 20,000 مولود

نستخدم النسبة المقروءة من الجدول في البند السابق؛ العدد تقريبي لأن العلامة المعيارية قُربت.

$$N = 20,000 \cdot P(X < 1.5)$$

$$N \approx 20,000 \cdot 0.0174$$

$$N \approx 348$$

الجواب النهائي

عدد المواليد التقريبي

$$N \approx 348$$

د · معدّل المدينة الثانية

في المدينة الثانية الانحراف المعياري 0.8 كغم، ووزن شاح 4.606 كغم. نكتب دستور العلامة المعيارية ونحل للمتوسط.

$$1.34 = \frac{4.606 - \mu_2}{0.8}$$

$$1.34 \cdot 0.8 = 4.606 - \mu_2$$

$$1.072 = 4.606 - \mu_2$$

$$\mu_2 = 4.606 - 1.072 = 3.534$$

الجواب النهائي

معدّل أوزان المواليد في مدينة شاح

$$\mu_2 \approx 3.534 \text{ kg}$$

السؤال 2 . الانحدار بين النمو السكاني ونسبة الأطفال

2. أجرى دان بحثاً عن العلاقة بين النسبة المئوية للنمو السنوي للسكان في 12 دولة (المتغير x) والنسبة المئوية للأطفال في الأعمار 0-14 فيها (المتغير y).
أراد إيجاد مستقيم انحدار للتنبؤ بـ y حسب x . حسب متوسط نسب النمو السنوي وانحرافها المعياري ومعامل الارتباط بين المتغيرين، وحصل على:

$$\bar{x} = 0.465 ; s_x = 0.683 ; r = 0.871$$

- وجد دان أن معادلة مستقيم الانحدار هي $y = 11.3x + 16.3$.
- أ. (1) جدوا متوسط النسبة المئوية للأطفال في هذه الدول (متوسط المتغير y).
- (2) جدوا الانحراف المعياري للنسبة المئوية للأطفال في هذه الدول.
- في دولة معينة حجم السكان ثابت، أي لا يوجد نمو سنوي للسكان.
- ب. حسب مستقيم الانحدار، ما هي النسبة المئوية للأطفال في هذه الدولة؟
- معطى دولة إضافية نسبة النمو السنوي لسكانها 2%.
- ج. هل يمكن الاستنتاج أن النسبة المئوية للأطفال فيها هي 38.9% بالضبط؟ عللوا إجابتكم.

أ(1) . معدّل نسبة الأطفال

نعوّض معدّل x في معادلة مستقيم الانحدار لنجد معدّل y .

$$\begin{aligned}\bar{y} &= 11.3\bar{x} + 16.3 \\ \bar{y} &= 11.3(0.465) + 16.3 \\ 11.3(0.465) &= 5.2545 \\ \bar{y} &= 5.2545 + 16.3 = 21.5545\end{aligned}$$

الجواب النهائي
معدّل نسبة الأطفال

$$\bar{y} = 21.5545\%$$

أ(2) . الانحراف المعياري لنسبة الأطفال

ميل مستقيم انحدار y بحسب x يساوي معامل الارتباط مضروباً في نسبة الانحرافين المعياريين.

$$\begin{aligned}m &= r \frac{S_y}{S_x} \\ 11.3 &= 0.871 \frac{S_y}{0.683} \\ 11.3 \cdot 0.683 &= 0.871 S_y \\ S_y &= \frac{11.3 \cdot 0.683}{0.871} \approx 8.861\end{aligned}$$

الجواب النهائي
الانحراف المعياري لنسبة الأطفال

$$S_y \approx 8.861$$

ب . تنبؤ لدولة نموّها صفر

النتائج تنبؤ إحصائي من المستقيم .

$$\hat{y} = 11.3x + 16.3$$

$$x = 0 \implies \hat{y} = 11.3(0) + 16.3$$

$$\hat{y} = 16.3$$

الجواب النهائي

نسبة الأطفال المتوقعة بحسب المستقيم

$$\hat{y} = 16.3\%$$

ج . هل 38.9% نسبة مؤكّدة؟

المستقيم يعطي قيمة متوقعة. معامل الارتباط 0.871 أصغر من 1، لذلك قد تختلف مشاهدة دولة بعينها عن هذا التنبؤ.

$$\hat{y} = 11.3(2) + 16.3 = 22.6 + 16.3 = 38.9$$

$$r = 0.871 < 1$$

الجواب النهائي

لا يمكن استنتاج النسبة الفعلية بدقة؛ هذه قيمة تنبؤية فقط

$$\hat{y}(2) = 38.9\%, \quad r = 0.871 < 1$$

السؤال 3 . احتمال إصابة الهدف في محاولتين

3. يلعب حنان لعبة إصابة هدف. في اللعبة نتيجتان ممكنتان فقط: إصابة أو إخفاق.
 احتمال أن يصيب حنان في المحاولة الأولى $\frac{3}{5}$. يعتمد احتمال الإصابة في المحاولة الثانية على نتيجة الأولى:
 إذا أصاب في الأولى، فاحتمال أن يصيب في الثانية $\frac{2}{3}$. إذا أخفق في الأولى، فاحتمال أن يصيب في الثانية $\frac{7}{16}$.
 لحنان محاولتان لإصابة الهدف.
 أ. ما هو احتمال أن يكون حنان قد أخفق في الأولى وأصاب في الثانية؟

ب. (1) ما هو احتمال أن يصيب حنان مرة واحدة على الأقل؟
 (2) معلوم أن حنان أصاب مرة واحدة على الأقل. ما هو احتمال أنه أصاب مرة واحدة بالضبط؟
 لداني أيضًا محاولتان. احتمال إصابته في كل محاولة هو p .
 معطى أن احتمال أن يصيب داني مرة واحدة بالضبط مساو لاحتمال أن يصيب حنان مرة واحدة بالضبط.
 ج. جدوا p (الإمكائيتين).

أ . إخفاق ثم إصابة

احتمال الإصابة الثانية بعد إخفاق الأولى احتمال مشروط؛ نضرب احتمالي فرعي المسار. نرمز إلى الإصابة بـ H_2 ، وإلى الإخفاق بـ F_1 ،
 ورقم المحاولة هو الدليل السفلي.



$$P(F_1) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

$$P(H_2 | F_1) = \frac{7}{16}$$

$$P(F_1 \cap H_2) = P(F_1)P(H_2 | F_1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{16} = \frac{7}{40}$$

الجواب النهائي
 احتمال المسار

$$P = \frac{7}{40}$$

ب(1) · إصابة واحدة على الأقل

مسار الإخفاقين هو الوحيد الذي لا تحدث فيه أي إصابة.



$$P(F_2 | F_1) = 1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16}$$

$$P(F_1 \cap F_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{9}{16} = \frac{9}{40}$$

$$P(H_1 \cup H_2) = 1 - P(F_1 \cap F_2) = 1 - \frac{9}{40} = \frac{31}{40}$$

الجواب النهائي
احتمال إصابة واحدة على الأقل

$$P = \frac{31}{40}$$

ب(2) · إصابة واحدة بالضبط بشرط إصابة واحدة على الأقل

المساران منفصلان: إصابة ثم إخفاق، أو إخفاق ثم إصابة. عند العلم بحدوث إصابة واحدة على الأقل يتغير فضاء العينة. نرسم E إلى حدث الإصابة مرة واحدة بالضبط.



$$P(H_1 \cap F_2) = \frac{3}{5} \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{5} = \frac{8}{40}$$

$$P(F_1 \cap H_2) = \frac{7}{40}$$

$$P(E) = P(H_1 \cap F_2) + P(F_1 \cap H_2) = \frac{8}{40} + \frac{7}{40} = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$$

$$P(E | H_1 \cup H_2) = \frac{15/40}{31/40} = \frac{15}{31}$$

الجواب النهائي
الاحتمال المشروط

$$P = \frac{15}{31}$$

ج . احتمال إصابة داني في كل محاولة

نساوي احتمال داني باحتمال إصابة حنان مرة واحدة بالضبط، ثم نحل التريعية ونفحص الحلين في المجال $[0,1]$.

$$P_D(E) = p(1-p) + (1-p)p = 2p(1-p)$$

$$2p(1-p) = \frac{3}{8}$$

$$p(1-p) = \frac{3}{16}$$

$$p^2 - p + \frac{3}{16} = 0$$

$$\left(p - \frac{1}{4}\right) \left(p - \frac{3}{4}\right) = 0$$

$$p = \frac{1}{4} \quad p = \frac{3}{4}$$

الجواب النهائي
الاحتمالان الممكنان

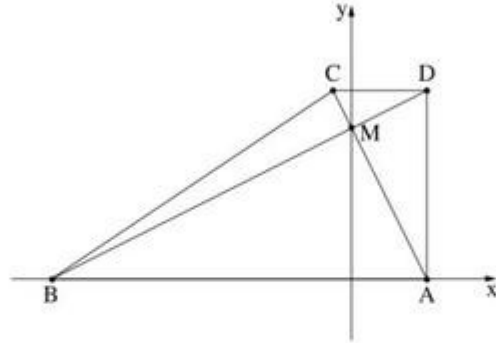
$$p \in \left\{ \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right\}$$

السؤال 4 • شبه المنحرف في المستوى الإحداثي

4. الفصل الثاني - هندسة

معطى شبه منحرف قائم الزاوية ABCD، بحيث $AB \parallel DC$ و $AD \perp AB$. يقع الرأسان A و B على محور x، كما في الرسم.

يلتقي قطرا شبه المنحرف في النقطة M الواقعة على محور y. معطى أن $AC \perp BD$ ، وأن معادلة AC هي $y = -2x + 8$.



- جدوا معادلة المستقيم BD.
 - جدوا إحداثيات الرؤوس A , B , C , D.
 - احسبوا قياس الزاوية ABD.
 - احسبوا قياس الزاوية BCD.
 - جدوا مساحة المثلث BCD.
 - النقطة F تقع على امتداد الضلع CD بحيث تكون مساحة المثلث BFC أكبر بمرتين من مساحة المثلث BCD.
 - جدوا إحداثيات النقطة F (جدوا إحدى الإمكانيتين).
5. معطى دائرة مركزها M على الجزء الموجب من محور y. النقطة O هي مبدأ المحاور.

أ • معادلة BD

ميل AC هو -2؛ ميل العمودي عليه 1/2. نعوض $x=0$ في AC لنجد M.

$$m_{AC} = -2$$

$$m_{BD} = -\frac{1}{m_{AC}} = \frac{1}{2}$$

$$x_M = 0 \implies y_M = -2(0) + 8 = 8$$

$$M = (0, 8)$$

$$y - 8 = \frac{1}{2}(x - 0)$$

$$y = \frac{1}{2}x + 8$$

الجواب النهائي
معادلة القطر BD

$$y = \frac{1}{2}x + 8$$

ب . إحداثيات الرؤوس

A و B تقاطع AC و BD مع محور x على الترتيب. D فوق A، و C و D على مستقيم أفقي واحد.

$$0 = -2x_A + 8 \implies x_A = 4 \implies A = (4, 0)$$

$$0 = \frac{1}{2}x_B + 8 \implies x_B = -16 \implies B = (-16, 0)$$

$$x_D = x_A = 4, \quad y_D = \frac{1}{2}(4) + 8 = 10 \implies D = (4, 10)$$

$$y_C = y_D = 10, \quad 10 = -2x_C + 8 \implies x_C = -1$$
$$C = (-1, 10)$$

الجواب النهائي
الرؤوس الأربعة

$$A = (4, 0), B = (-16, 0), C = (-1, 10), D = (4, 10)$$

ج(1) . الزاوية ABD

الزاوية عند B بين BA الأفقي الموجب و BD، لذلك ظلها هو مقدار الميل.

$$\tan \angle ABD = \frac{y_D - y_B}{x_D - x_B} = \frac{10 - 0}{4 - (-16)} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

$$\angle ABD = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \approx 26.565^\circ$$

الجواب النهائي
قياس الزاوية ABD

$$\angle ABD \approx 26.57^\circ$$

ج(2) . الزاوية BCD

المتجه من C إلى B يتجه لليسار وللأسفل، و CD يتجه لليمين؛ الزاوية الداخلية منفرجة.

$$|\Delta x_{CB}| = |-16 - (-1)| = 15, \quad |\Delta y_{CB}| = |0 - 10| = 10$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{10}{15}\right) \approx 33.690^\circ$$

$$\angle BCD = 180^\circ - \alpha \approx 146.310^\circ$$

الجواب النهائي
قياس الزاوية BCD

$$\angle BCD \approx 146.31^\circ$$

د . مساحة المثلث BCD

نحسب طول CD والبعد العمودي من B إلى المستقيم $y=10$.

$$CD = 4 - (-1) = 5$$

$$h = |10 - 0| = 10$$

$$S_{BCD} = \frac{CD \cdot h}{2} = \frac{5 \cdot 10}{2} = 25$$

الجواب النهائي
مساحة المثلث BCD

$$S_{BCD} = 25$$

هـ . إحدائيات F

كي تتضاعف المساحة يجب أن يكون طول CF ضعف CD. نختار الامتداد الواقع بعد D.

$$\frac{S_{BFC}}{S_{BCD}} = \frac{CF}{CD} = 2$$

$$CF = 2CD = 2 \cdot 5 = 10$$

$$x_F = x_C + 10 = -1 + 10 = 9, \quad y_F = 10$$

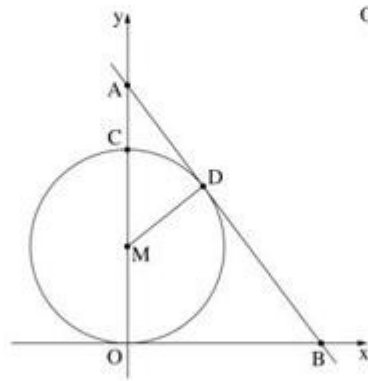
$$F = (9, 10)$$

الجواب النهائي
إحدى النقطتين الممكنتين

$$F = (9, 10)$$

السؤال 5 • المماس والدائرة المحورية

- د. معطى دائرة مركزها M على الجزء الموجب من محور y . النقطة O هي مبدأ المحاور. تمس الدائرة محور x وتقطع محور y في النقطة C ، كما في الرسم. مرّروا مماساً للدائرة من النقطة D الواقعة عليها. يقطع المماس محور x في النقطة B ومحور y في النقطة A . معطى أنّ معادلة المماس هي $4x + 3y = 40$.



- أ. جدوا طول القطعة AB .
ب. أثبتوا أنّ الشكل الرباعي $OMDB$ دائري (طائرة ورقية).
ج. (1) أثبتوا أنّ $\triangle ADM \sim \triangle AOB$.
(2) جدوا نصف قطر الدائرة.
د. جدوا معادلة الدائرة.
هـ. هل يمكن حصر الدائرتين $OMDB$ في دائرة؟
إذا نعم، جدوا إحداثيات مركز الدائرة المحيطة به. إذا لا، فسّروا لماذا.

أ • طول AB

عند B يكون $y=0$ ، وعند A يكون $x=0$.

$$4x + 3y = 40$$

$$y = 0 \implies x_B = 10 \implies B = (10, 0)$$

$$x = 0 \implies y_A = \frac{40}{3} \implies A = \left(0, \frac{40}{3}\right)$$

$$AB = \sqrt{(10 - 0)^2 + \left(0 - \frac{40}{3}\right)^2}$$

$$AB = \sqrt{100 + \frac{1600}{9}} = \sqrt{\frac{2500}{9}} = \frac{50}{3}$$

الجواب النهائي
طول AB

$$AB = \frac{50}{3}$$

ب . إثبات أن OMDB دالتون

O و D نقطتا تماس المماسين الخارجين من B، ولذلك طولا المماسين BO و BD متساويان. كذلك MO و MD نصف قطر.

$$BO = BD$$

$$MO = MD$$

$$BO = BD \quad MO = MD$$

الجواب النهائي
المطلوب إثباته

$$OMDB$$

ج(1) . تشابه ADM و AOB

نصف القطر MD عمودي على المماس AD؛ كذلك MO عمودي على OB. و AD على AB و AM على AO.

$$\angle ADM = \angle AOB = 90^\circ$$

$$\angle DAM = \angle BAO$$

$$\triangle ADM \sim \triangle AOB$$

الجواب النهائي
المطلوب إثباته

$$\triangle ADM \sim \triangle AOB$$

ج(2) . نصف قطر الدائرة

إذا رمزنا إلى نصف القطر بـ r ، فإن $OM=MD=r$ و $AM=40/3-r$. من التناظر $AD/AO = DM/OB = AM/AB$ ، ويمكن أيضًا استعمال مسافة المركز عن المماس.

$$M = (0, r), \quad r > 0$$

$$d(M, 4x + 3y - 40 = 0) = \frac{|3r - 40|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|3r - 40|}{5}$$

$$0 < r < \frac{40}{3} \implies \frac{40 - 3r}{5} = r$$

$$40 - 3r = 5r \implies 8r = 40$$

$$r = 5$$

الجواب النهائي
نصف القطر

$$r = 5$$

د . معادلة الدائرة

من البند السابق $M=(0,5)$. نعوّض المركز ونصف القطر في معادلة الدائرة.

$$\begin{aligned}M &= (0, 5), \quad r = 5 \\(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 &= r^2 \\(x - 0)^2 + (y - 5)^2 &= 5^2\end{aligned}$$

الجواب النهائي
معادلة الدائرة

$$x^2 + (y - 5)^2 = 25$$

هـ . هل OMDB رباعي دائري؟

نصفا القطر إلى نقطتي التماس عموديان على المماسين، لذا الزاويتان المتقابلتان قائمتان ومجموعهما 180° . MB قطر الدائرة المحيطة.

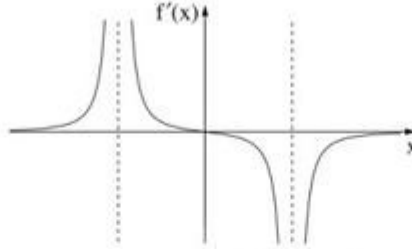
$$\begin{aligned}\angle MOB &= 90^\circ, \quad \angle MDB = 90^\circ \\ \angle MOB + \angle MDB &= 180^\circ \\ O, M, D, B \\ M &= (0, 5), \quad B = (10, 0) \\ K &= \left(\frac{0+10}{2}, \frac{5+0}{2} \right) = \left(5, \frac{5}{2} \right)\end{aligned}$$

الجواب النهائي
الحصر والمركز

$$K = \left(5, \frac{5}{2} \right)$$

السؤال 6 • الدالة النسبية ورسم المشتقة

6. الفصل الثالث - التفاضل والتكامل لكثيرات الحدود والدوال النسبية ولدوال الجذر
الدالة $f(x)$ معرفة في المجال $x \neq \pm 4$. يصف الرسم أمامكم دالة المشتقة $f'(x)$ ، المعرفة في المجال نفسه.
يقطع الرسم البياني لدالة المشتقة محور x فقط في النقطة $(0, 0)$.



- أ. جدوا الإحداثي x لنقطة تطرف الدالة $f(x)$ ، وحددوا نوعها.
ب. جدوا مجالات تصاعد الدالة $f(x)$ وتنقصها.
معطى أن للدالة $f(x)$ خط تقارب أفقي معادلته $y = 2$. أحد التعابير I-III يمثل الدالة:

I. $\frac{x^2}{x^2 + 16} + 1$

II. $\frac{x^2}{x^2 - 16} + 2$

III. $\frac{x^2}{x^2 - 16} + 1$

- ج. حدّدوا أيّ تعبير يمثل الدالة $f(x)$. علّلوا تحديدكم.
د. جدوا إحداثيات نقاط تقاطع الرسم البياني للدالة $f(x)$ مع المحاور.
هـ. ارسموا رسماً تقريبياً للرسم البياني للدالة $f(x)$.
و. احسبوا المساحة المحصورة بين الرسم البياني لدالة المشتقة $f'(x)$ ومحور x والمستقيم $x = 2$.

أ • نوع نقطة التطرف

من الرسم: المشتقة موجبة قبل الصفر وسالبة بعده؛ إذا يتبدّل اتجاه الدالة من التصاعد إلى التنازل.

$$f'(x) > 0 \quad (-4 < x < 0)$$

$$f'(0) = 0$$

$$f'(x) < 0 \quad (0 < x < 4)$$

الجواب النهائي
عظمى عند الإحداثي x الآتي

$$x = 0$$

ب • مجالات التصاعد والتنازل

نقرأ الإشارة على كل فترة من الفترات التي يفصلها خط الانقطاع والصفر.

$$f'(x) > 0 \quad x < 0, x \neq -4$$

$$f'(x) < 0 \quad x > 0, x \neq 4$$

$$(-\infty, -4), (-4, 0)$$

$$(0, 4), (4, \infty)$$

الجواب النهائي
مجالات الرتبة

$$\nearrow (-\infty, -4), (-4, 0); \searrow (0, 4), (4, \infty)$$

ج . اختيار تعبير f

التعبير الأول معرف عند $4 \pm$ وله تقارب $y=2$. التعبير الثاني له تقارب $y=3$. الثالث فقط يلائم المجال والتقارب معاً.

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 16} + 1$$

$$x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4) \neq 0 \implies x \neq \pm 4$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - 16} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1 + 1 = 2$$

الجواب النهائي
التعبير الملائم

$$\text{III : } f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 16} + 1$$

د . نقاط التقاطع مع المحورين

المقام غير صفر عند الجذور الناتجة، لذا الجذران مقبولان.

$$f(0) = \frac{0}{-16} + 1 = 1 \implies (0, 1)$$

$$0 = \frac{x^2}{x^2 - 16} + 1$$

$$0 = x^2 + (x^2 - 16) = 2x^2 - 16$$

$$x^2 = 8 \implies x = \pm 2\sqrt{2}$$

الجواب النهائي
نقاط التقاطع

$$(-2\sqrt{2}, 0), (2\sqrt{2}, 0), (0, 1)$$

هـ . الرسم التقريبي

يوجد تقاربان عموديان عند $4 \pm$ وتقارب أفقي $y=2$. الفرع الأوسط يمر بالجذرين ويبلغ عظمى عند $(0, 1)$.

$$f(x) = 2 + \frac{16}{x^2 - 16}$$

$$x = \pm 4$$

$$y = 2$$

$$f(0) = 1, \quad f(\pm 2\sqrt{2}) = 0$$

$$f'(x) = \frac{-32x}{(x^2 - 16)^2}$$

الجواب النهائي
معطيات الرسم

$$x = \pm 4(0, 1)$$

و. المساحة تحت رسم 'f

المساحة موجبة، لذا نأخذ سالب التكامل ونستعمل النظرية الأساسية للتكامل.

$$S = \int_0^2 |f'(x)| dx = - \int_0^2 f'(x) dx$$

$$S = -[f(2) - f(0)] = f(0) - f(2)$$

$$f(0) = 1$$

$$f(2) = \frac{4}{4 - 16} + 1 = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$$

$$S = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

الجواب النهائي
المساحة

$$S = \frac{1}{3}$$

السؤال 7 • بحث الدالة الجذرية والإزاحة

7. معطى الدالة $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{-2x + 10}$.

أ. جدوا مجال تعريف الدالة $f(x)$.

ب. جدوا إحداثيات نقاط تقاطع الرسم البياني للدالة $f(x)$ مع المحاور.

ج. جدوا إحداثيات جميع نقاط تطرف الدالة $f(x)$ ، وحددوا نوعها.

د. ارسموا رسماً تقريبياً للرسم البياني للدالة $f(x)$.

معطى الدالة $g(x) = f(x) - c$ ، حيث c بارامتر موجب. الدالتان معرقتان في المجال نفسه.

الرسم البياني للدالة $g(x)$ يمسّ المستقيم $y = 20$.

هـ. جدوا قيمة c .

أ • مجال التعريف

العامل x^2 لا يفرض قيداً؛ نشترط أن يكون ما تحت الجذر غير سالب.

$$-2x + 10 \geq 0$$

$$-2x \geq -10$$

$$x \leq 5$$

الجواب النهائي
مجال التعريف

$$D_f = (-\infty, 5]$$

ب • نقاط التقاطع

عند $x=0$ ينعدم x^2 ، وعند $x=5$ ينعدم الجذر. النقطة عند $x=0$ مشتركة للمحورين.

$$f(x) = x^2 \sqrt{10 - 2x}$$

$$f(x) = 0 \implies x^2 = 0 \quad 10 - 2x = 0$$

$$x = 0 \quad x = 5$$

$$f(0) = 0$$

الجواب النهائي
نقاط التقاطع مع المحورين

$$(0, 0), (5, 0)$$

ج • نقاط التطرف

المقام موجب داخل المجال. إشارة المشتقة هي إشارة $x(4-x)$. نضيف طرف المجال $x=5$ عند تحديد كل النقاط القصوى.

$$f'(x) = 2x\sqrt{10 - 2x} + x^2 \frac{-2}{2\sqrt{10 - 2x}}$$

$$f'(x) = 2x\sqrt{10-2x} - \frac{x^2}{\sqrt{10-2x}}$$

$$f'(x) = \frac{2x(10-2x) - x^2}{\sqrt{10-2x}}$$

$$f'(x) = \frac{20x - 5x^2}{\sqrt{10-2x}} = \frac{5x(4-x)}{\sqrt{10-2x}}$$

$$f'(x) < 0 \ (x < 0), \quad f'(x) > 0 \ (0 < x < 4), \quad f'(x) < 0 \ (4 < x < 5)$$

$$f(0) = 0, \quad f(4) = 16\sqrt{2}, \quad f(5) = 0$$

الجواب النهائي

صغرى، ثم عظمى، ثم صغرى طرفية، بالترتيب

$$(0, 0), (4, 16\sqrt{2}), (5, 0)$$

د . الرسم التقريبي

الدالة غير سالبة في مجالها. تتناقص إلى الأصل ثم تتصاعد إلى $(4, 16\sqrt{2})$ وتنتهي بالتناقص عند $(5, 0)$.

$$f(x) \geq 0 \quad x \leq 5$$

$$\searrow (-\infty, 0), \quad \nearrow (0, 4), \quad \searrow (4, 5)$$

$$(0, 0), \quad (4, 16\sqrt{2}), \quad (5, 0)$$

الجواب النهائي

وصف الرسم

$$(0, 0), \quad (4, 16\sqrt{2}), \quad (5, 0)$$

هـ . إيجاد c

الإزاحة الرأسية إلى الأسفل لا تغيّر موضع النقطة القصوى، وتصبح قيمة العظمى $c - 2\sqrt{16}$.

$$g(x) = f(x) - c$$

$$g(4) = f(4) - c = 16\sqrt{2} - c$$

$$16\sqrt{2} - c = 20$$

$$c = 16\sqrt{2} - 20$$

$$16\sqrt{2} - 20 \approx 2.627 > 0$$

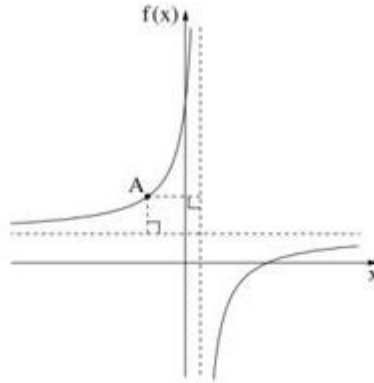
الجواب النهائي

قيمة البارامتر

$$c = 16\sqrt{2} - 20$$

السؤال 8 . محيط مستطيل عند دالة نسبية

8. أمامكم الرسم البياني للدالة $f(x) = \frac{9}{1-x} + 2$ ، المعرفة لكل $x \neq 1$.



- أ. جدوا معادلات خطوط التقارب العمودية على المحاور للدالة $f(x)$.
من نقطة A على الرسم البياني للدالة $f(x)$ في الربع الثاني، مرّروا عمودين على خطّي التقارب بحيث يُشكّل خطّ التقارب والعمودان مستطيلًا.
ب. جدوا إحداثيات النقطة A التي يكون عندها محيط المستطيل أصغر ما يمكن.
ج. احسبوا مساحة المستطيل لإحداثيات النقطة A التي وجدتموها في ب.

أ . خطا التقارب

البسط 9 غير صفر؛ لذلك $x=1$ تقارب عمودي، والحد الكسري يقترب من الصفر عند اللانهاية.

$$f(x) = \frac{9}{1-x} + 2$$
$$1-x=0 \implies x=1$$
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{9}{1-x} = 0$$
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2$$

الجواب النهائي
خطا التقارب

$$x = 1, \quad y = 2$$

ب . أصغر محيط وإحداثيات A

A في الربع الثاني، والعرض من x إلى 1 هو $t=1-x>1$ ، والارتفاع من $y=2$ إلى المنحنى هو $t/9$. نستعمل المشتقة ونفحص المجال.

$$A = (x, f(x)), \quad x < 0$$

$$t = 1 - x > 1, \quad h = f(x) - 2 = \frac{9}{1-x} = \frac{9}{t}$$

$$P(t) = 2 \left(t + \frac{9}{t} \right)$$

$$Pl(t) = 2 \left(1 - \frac{9}{t^2} \right)$$

$$Pl(t) = 0 \implies t^2 = 9 \implies t = 3$$

$$Pl(t) < 0 \quad (1 < t < 3), \quad Pl(t) > 0 \quad (t > 3)$$

$$1 - x = 3 \implies x = -2$$

$$y = f(-2) = \frac{9}{1 - (-2)} + 2 = 3 + 2 = 5$$

الجواب النهائي

النقطة التي تعطي أصغر محيط

$$A = (-2, 5)$$

ج . مساحة المستطيل

التقاربان يحددان ضلعين، والعمودان من A يكملان المستطيل.

$$= 1 - (-2) = 3$$

$$= 5 - 2 = 3$$

$$S = 3 \cdot 3 = 9$$

الجواب النهائي

مساحة المستطيل

$$S = 9$$