

حلول امتحان البجروت 35471

صيف 2024 · الموعد ب · النموذج العربي الرسمي · النسخة أ

حلول عربية مفصلة، مع فصل الجواب النهائي عن خطوات الحساب.

حلول تعليمية أصلية وليست حلولاً رسمية للوزارة.

حقوق النشر والطباعة | mathbagrut.com

© 2026 mathbagrut.com — حقوق الشرح والحلول والتصميم محفوظة. الطباعة التعليمية الشخصية أو الصفية مسموحة مع إبقاء

اسم الموقع. إعادة النشر أو البيع تحتاج إذنًا خطيًا.

نص السؤال من امتحان وزارة التربية والتعليم؛ حقوق النص الأصلي والرسوم للوزارة. الحلول تعليمية مستقلة وليست حلاً رسمياً.

السؤال 1 • توزيع أطوال سيقان الورود

أجبوا عن أربعة من الأسئلة 1-8، على الأقل عن سؤال واحد من كل فصل. (لكل سؤال - 25 درجة).
انتهوا: إذا أجبتكم عن أكثر من أربعة أسئلة، تُفحص فقط الإجابات الأربع الأولى التي في دفتركم.

الفصل الأول - الإحصاء والاحتمال

1. في مشتل معين، أطوال سيقان الورود تتوزع طبيعيًا. معدل أطوال سيقان الورود في المشتل هو 20 سم. يُصنّفون الورود في المشتل إلى ثلاث مجموعات:
المجموعة "أ" - ورود طول سيقانها أقصر من 22 سم.
المجموعة "ب" - ورود طول سيقانها يتراوح بين 22 سم و 26 سم.
المجموعة "ج" - بقية الورود.
معطى أن نسبة الورود في المجموعة "أ" هي 65.5%.
أ. جدوا الانحراف المعياري لطول سيقان الورود في المشتل.
ب. جدوا ما هي النسبة المئوية للورود التي في المجموعة "ج" من جميع الورود في المشتل.
في أحد الأيام، كان في المشتل ما مجموعه 2,000 وردة.
قرروا في المشتل تحضير باقات من جميع الورود التي في المجموعة "ب"، بحيث يكون في كل باقة 10 ورود.
ج. حسب جدول التوزيع الطبيعي، كم باقة حضروا في المشتل في هذا اليوم؟
في مشتل آخر، تتوزع فيه أيضًا أطوال سيقان الورود طبيعيًا، النسبة المئوية للورود التي طول سيقانها أطول من 24 سم تساوي النسبة المئوية للورود التي في المجموعة "ب".
معطى أن الانحراف المعياري لطول سيقان الورود في المشتلين متساو.
د. جدوا معدل أطوال سيقان الورود في المشتل الآخر.

أ • الانحراف المعياري

نرمز للطول بـ X ؛ مساحة المنحنى يسار 22 هي 0.655، وتقابلها العلامة المعيارية 0.40 تقريبًا.

$$X \sim N(20, \sigma^2)$$

$$P(X < 22) = 0.655$$

$$P(Z < 0.40) \approx 0.655$$

$$\frac{22 - 20}{\sigma} = 0.40$$

$$\sigma = \frac{2}{0.40} = 5$$

الجواب النهائي
الانحراف المعياري

$$\sigma \approx 5 \text{ cm}$$

ب . نسبة المجموعة ج

المجموعة ج تضم كل ما تجاوز طول ساقه 26 سم. نحول إلى العلامة المعيارية ثم نأخذ المتمم.

$$z = \frac{26 - 20}{5} = \frac{6}{5} = 1.20$$

$$P(X > 26) = 1 - P(Z < 1.20)$$

$$P(X > 26) = 1 - 0.8849 = 0.1151$$

$$0.1151 \cdot 100\% = 11.51\%$$

الجواب النهائي
نسبة ورود المجموعة ج

11.51%

ج . عدد الباقيات

نطرح المساحة يسار 22 من المساحة يسار 26. نسبة المجموعة ب نحو 23%، وفي كل باقة عشر وردات؛ نذكر أثر تقريب الجدول.

$$P(22 \leq X \leq 26) = 0.8849 - 0.6554 = 0.2295 \approx 0.23$$

$$N_B \approx 2000(0.23) = 460$$

$$460 \div 10 = 46$$

الجواب النهائي
عدد الباقيات تقريباً

46

د . معدل المشتل الثاني

الانحراف المعياري نفسه، والمساحة يسار 24 هي متمم مساحة ب؛ نقرب العلامة المعيارية بحسب جدول التوزيع.

$$P(X_2 > 24) = 0.2295$$

$$P(X_2 < 24) = 1 - 0.2295 = 0.7705$$

$$P(Z < 0.74) \approx 0.7705$$

$$\frac{24 - \mu_2}{5} \approx 0.74$$

$$24 - \mu_2 \approx 3.70$$

$$\mu_2 \approx 20.30$$

الجواب النهائي
معدل المشتل الآخر

$\mu_2 \approx 20.3 \text{ cm}$

السؤال 2 · معامل الارتباط ومستقيم الانحدار

الجدول 3		الجدول 2		الجدول 1	
x	y	x	y	x	y
16	35	4	9	1	2
17	34	5	11	2	4
18	33	6	19	3	6
19	32	7	22	4	8
20	31	8	17	5	10

نرمز بـ r إلى معامل التناسب (الارتباط) بين x و y .

أ. لائما بين كل واحد من الأقوال III-I التي أمامكم والجدول 3-I:

I. $0 < r < 1$

II. $r = 1$

III. $r = -1$

المعطيات في الجدول 2 تنطبق إلى مجموعة من 5 رياضيين.

يصف الجدول العلاقة بين عدد المرات التي يتدرب فيها كل واحد من الرياضيين في الأسبوع (المتغير x) وبين عدد الساعات التي يتدرب فيها في الأسبوع (المتغير y).

معطى أن معادلة مستقيم الانحدار للتنبؤ بـ y حسب x هي $y = 2.7x + b$ ، b هو پارامتر.

ب. جدوا معدل عدد المرات في الأسبوع التي يتدرب فيها الرياضي في هذه المجموعة، وما هو معدل عدد الساعات التي يتدرب فيها في الأسبوع.

ج. جدوا قيمة البارامتر b .

د. معطى أن النسبة بين الانحرافين المعياريين للمعطيات في الجدول 2 هي $\frac{s_y}{s_x} = 3.45$.

هـ. احسبوا قيمة r .

أ · مطابقة الجداول

الجدول 1 يتزايد فيه y بمقدار ثابت مع x ، والجدول 3 يتناقص بمقدار ثابت، والجدول 2 يتزايد عموماً لكنه لا يقع كله على مستقيم.

$$y = 2x \implies r = 1$$

$$y = 51 - x \implies r = -1$$

$$0 < r < 1$$

الجواب النهائي

توافق الأقوال I و II و III مع الجداول

I $\rightarrow$ 2, II $\rightarrow$ 1, III $\rightarrow$ 3

ب · معدلا التدريب

نأخذ أزواج الجدول 2 المعطاة، ثم نكتب وحدة x عدد مرات، ووحدة y ساعات أسبوعياً.

$$\bar{x} = \frac{4 + 5 + 6 + 7 + 8}{5} = \frac{30}{5} = 6$$

$$\bar{y} = \frac{9 + 11 + 19 + 22 + 17}{5} = \frac{78}{5} = 15.6$$

الجواب النهائي
معدلاً عدد المرات والساعات

$$\bar{x} = 6, \quad \bar{y} = 15.6$$

ج . قيمة b

مستقيم الانحدار y حسب x يمر دائماً بنقطة المعدلين المحسوبة.

$$\hat{y} = 2.7x + b$$

$$15.6 = 2.7(6) + b$$

$$15.6 = 16.2 + b$$

$$b = 15.6 - 16.2 = -0.6$$

الجواب النهائي
البارامتر b

$$b = -0.6$$

د . معامل الارتباط

ميل انحدار y حسب x يساوي r مضروباً بنسبة الانحراف المعياري لـ y إلى الانحراف المعياري لـ x .

$$2.7 = r \frac{s_y}{s_x}$$

$$\frac{s_y}{s_x} = 3.45$$

$$2.7 = 3.45r$$

$$r = \frac{2.7}{3.45} = \frac{18}{23} \approx 0.783$$

الجواب النهائي
معامل الارتباط

$$r \approx 0.783$$

السؤال 3 . احتمال جولتين مستقلتين

3. جميلة ورائد يلعبان لعبة . كلَّ جولة في اللعبة يمكن أن تنتهي بإحدى الإمكانات الثلاث التالية :
فُوز جميلة أو فُوز رائد أو التعادل .
الاحتمال بأن تفوز جميلة في جولة ما هو 3 أضعاف الاحتمال بأن يفوز رائد في جولة ما .
الاحتمال بأن تنتهي الجولة بالتعادل هو 0.28 .
أ . جدوا الاحتمال بأن تفوز جميلة في جولة ما في اللعبة .
في اللعبة التي تلعبها جميلة ورائد هناك جولتان . ليست هناك علاقة بين نتيجتي الجولتين .
ب . ما هو الاحتمال بأن لا تنتهي أية جولة بالتعادل ؟
جـ . ما هو الاحتمال بأن تفوز جميلة في إحدى الجولتين على الأقل ؟
د . معلوم أن جميلة فازت في إحدى الجولتين على الأقل . ما هو الاحتمال بأن تكون إحدى الجولتين قد انتهت بالتعادل ؟

/ يتبع في صفحة 4 /

أ . احتمال فوز جميلة

إذا كان احتمال فوز رائد p ، فاحتمال فوز جميلة $3p$ ، والتعادل 0.28.

الجدول الأول / الثانية فوز جميلة 0.54 فوز رائد 0.18 تعادل 0.28

فوز جميلة 0.54 0.2916 0.0972 0.1512

فوز رائد 0.18 0.0972 0.0324 0.0504

تعادل 0.28 0.1512 0.0504 0.0784

$$p + 3p + 0.28 = 1$$

$$4p = 0.72$$

$$p = 0.18$$

$$P(J) = 3(0.18) = 0.54$$

الجواب النهائي
احتمال فوز جميلة في جولة

$$P(J) = 0.54$$

ب . لا تعادل في أي جولة

احتمال الخس في جولة 0.72؛ استقلال الجولتين يسمح بضرب الاحتمالين.

الجدول الأول / الثانية فوز جميلة 0.54 فوز رائد 0.18 تعادل 0.28

0.1512	0.0972	0.2916	فوز جميلة 0.54
0.0504	0.0324	0.0972	فوز رائد 0.18
0.0784	0.0504	0.1512	تعادل 0.28

$$P(\bar{T}) = 1 - 0.28 = 0.72$$

$$P(\bar{T}_1 \cap \bar{T}_2) = 0.72(0.72) = 0.5184$$

الجواب النهائي
احتمال عدم التعادل في الجولتين

0.5184

ج . فوز جميلة مرة واحدة على الأقل

احتمال ألا تفوز جميلة في الجولة الواحدة هو فوز رائد أو التعادل: $0.18 + 0.28$.

الجولة الأولى / الثانية فوز جميلة 0.54 فوز رائد 0.18 تعادل 0.28

0.1512	0.0972	0.2916	فوز جميلة 0.54
0.0504	0.0324	0.0972	فوز رائد 0.18
0.0784	0.0504	0.1512	تعادل 0.28

$$P(\bar{J}) = 0.18 + 0.28 = 0.46$$

$$P(J_1 \cup J_2) = 1 - P(\bar{J}_1 \cap \bar{J}_2)$$

$$P(J_1 \cup J_2) = 1 - (0.46)^2 = 1 - 0.2116 = 0.7884$$

الجواب النهائي
فوز جميلة مرة على الأقل

0.7884

د . تعادل مع تحقق فوز جميلة

لكي يتحقق التعادل مرة على الأقل وفوز جميلة مرة على الأقل خلال جولتين، لا بد أن تكون النتيجةتان جميلة ثم تعادل، أو تعادل ثم جميلة.

ال الجولة الأولى / الثانية فوز جميلة 0.54 فوز رائد 0.18 تعادل 0.28

فوز جميلة 0.54 0.2916 0.0972 0.1512

فوز رائد 0.18 0.0972 0.0324 0.0504

تعادل 0.28 0.1512 0.0504 0.0784

$$P(T \cap J) = 0.54(0.28) + 0.28(0.54)$$

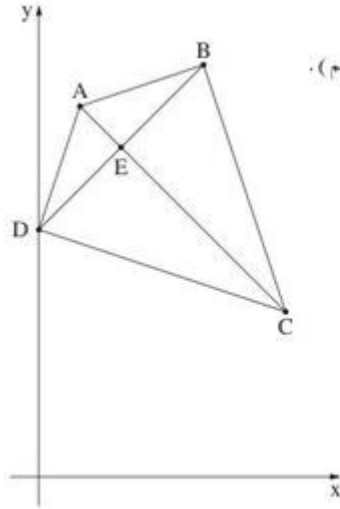
$$P(T \cap J) = 0.1512 + 0.1512 = 0.3024$$

$$P(T | J) = \frac{P(T \cap J)}{P(J)} = \frac{0.3024}{0.7884} \approx 0.38356$$

الجواب النهائي
الاحتمال المشروط

$$P(T | J) \approx 0.384$$

السؤال 4 • الدالتون في هيئة إحداثية



4. معطى الدالتون ABCD (CB = CD, AB = AD). الرأس D موضوع على المحور y، الإحداثي y للرأس D أصغر من 9 (انظروا الرسم). معطى أن: A(1,9)، C(6,4).
- أ. طول الضلع AD هو $\sqrt{10}$.
- ب. جدوا إحداثيات الرأس D.
- ج. جدوا معادلة المستقيم BD.
- د. E هي نقطة تقاطع قطري الدالتون.
- هـ. جدوا إحداثيات النقطة E.
- و. النقطة F تقع على القطعة EC.
- ز. برهنوا أن $\triangle ABF \cong \triangle ADF$.
- ح. جدوا إحداثيات النقطة F التي بالنسبة لها يكون الشكل الرباعي FBAD معيناً.
- ط. أمامكم الادعاءان I-II، حدّدوا بالنسبة لكل ادعاء إذا كان صحيحاً أم غير صحيح. علّلوا تحديدكم.
- I. المثلث ABC هو قائم الزاوية.
- II. الدالتون ABCD قابل للتحصر في دائرة.

أ(1) • الرأس D

إحداثي y لـ D أصغر من 9، ولذلك نختار الجذر الذي يحقق الشرط.

$$\begin{aligned} D &= (0, d), \quad A = (1, 9), \quad AD = \sqrt{10} \\ (1 - 0)^2 + (9 - d)^2 &= 10 \\ (9 - d)^2 &= 9 \\ 9 - d &= 3 \\ d &= 6 \end{aligned}$$

الجواب النهائي

إحداثيات الرأس D

$$D = (0, 6)$$

أ(2) • معادلة BD

القطر AC محور تماثل الدالتون، ولذلك BD عمودي عليه؛ ميل AC سالب واحد، فيكون ميل BD موجب واحد.

$$\begin{aligned} m_{AC} &= \frac{4 - 9}{6 - 1} = \frac{-5}{5} = -1 \\ m_{BD} &= 1 \\ y - 6 &= 1(x - 0) \\ y &= x + 6 \end{aligned}$$

الجواب النهائي
معادلة المستقيم BD

$$y = x + 6$$

ب . نقطة تقاطع القطرين

نكتب مستقيم AC من A وC، ونساويه مع مستقيم BD.

$$AC : y - 9 = -(x - 1) \Rightarrow y = -x + 10$$

$$-x + 10 = x + 6$$

$$2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

$$y = 2 + 6 = 8$$

الجواب النهائي
إحداثيات E

$$E = (2, 8)$$

ج . تطابق المثلثين

النقطة F على AC، محور تماثل الدالتون؛ لذلك $BF = DF$. كما أن $AB = AD$ بحسب المعطى وAF ضلع مشترك.

$$AB = AD$$

$$BF = DF$$

$$AF = AF$$

$$\triangle ABF \cong \triangle ADF \quad (SSS)$$

الجواب النهائي
تطابق المثلثين

$$\triangle ABF \cong \triangle ADF$$

د . الرأس F للمعيّن

ترتيب الرؤوس F,B,A,D يجعل قطريه FA وBD؛ E منتصف BD للدالتون، ويكون أيضًا منتصف FA في المعين.

$$E = \frac{F + A}{2}$$

$$F = 2E - A$$

$$F = (2 \cdot 2 - 1, 2 \cdot 8 - 9) = (3, 7)$$

$$7 = -3 + 10$$

الجواب النهائي
إحداثيات F

$$F = (3, 7)$$

هـ(I) . قائم الزاوية؟

في الدالتون ينعكس D إلى B حول AC، و E منتصف BD؛ إذاً $B=2E-D$. جداء ميل AB و BC سالب واحد.

$$B = 2E - D = (4, 16) - (0, 6) = (4, 10)$$

$$m_{AB} = \frac{10 - 9}{4 - 1} = \frac{1}{3}$$

$$m_{BC} = \frac{4 - 10}{6 - 4} = -3$$

$$m_{AB}m_{BC} = \frac{1}{3}(-3) = -1$$

الجواب النهائي
الادعاء I صحيح

$$\angle ABC = 90^\circ$$

هـ (II) · الدالتون في دائرة؟

زاوية B قائمة، وكذلك زاوية D؛ لذلك مجموع الزاويتين المتقابلتين 180° .

$$\overrightarrow{DA} = (1, 3), \quad \overrightarrow{DC} = (6, -2)$$

$$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = 1(6) + 3(-2) = 0$$

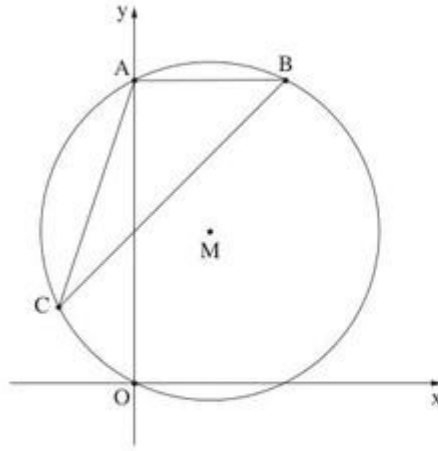
$$\angle ADC = 90^\circ$$

$$\angle ABC + \angle ADC = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

الجواب النهائي
الادعاء II صحيح

$$\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$$

السؤال 5 • دائرة ومثلث محصور



/ يتبع في صفحة 5 /

5. المثلث ABC محصور في دائرة،
 معطى أن مركز الدائرة M يقع في النقطة (4, 8).
 الدائرة تمر عبر نقطة أصل المحاور O (انظروا الرسم).
 النقطة A هي إحدى نقطتي تقاطع الدائرة مع المحور y.
 أ. (1) جدوا معادلة الدائرة.
 (2) جدوا إحداثيات النقطة A.
 الضلع AB يوازي المحور x.
 معطى أن ميل المستقيم BC هو 1.
 ب. (1) جدوا معادلة المستقيم BC.
 (2) جدوا إحداثيات الرأس C.
 ج. جدوا مقدار الزاوية ACB.
 النقطة E هي منتصف الضلع BC.
 د. جدوا طول نصف قطر الدائرة التي تحصر المثلث AEC.

أ(1) • معادلة الدائرة

الدائرة تمر بأصل المحاور؛ لذلك مربع نصف القطر يساوي مربع المسافة بين O و M.

$$M = (4, 8), \quad O = (0, 0)$$

$$R^2 = (4 - 0)^2 + (8 - 0)^2 = 16 + 64 = 80$$

$$(x - 4)^2 + (y - 8)^2 = 80$$

الجواب النهائي
معادلة الدائرة

$$(x - 4)^2 + (y - 8)^2 = 80$$

أ(2) • الرأس A

نقطتا تقاطع الدائرة مع محور y هما O المعلوم و A المطلوبة.

$$(0 - 4)^2 + (y - 8)^2 = 80$$

$$(y - 8)^2 = 64$$

$$y - 8 = 8 \quad \text{or} \quad y - 8 = -8$$

$$y = 16 \quad \text{or} \quad y = 0$$

الجواب النهائي
إحداثيات A

$$A = (0, 16)$$

ب(1) • المستقيم BC

بما أن AB أفقي، فإن إحداثي y للنقطة B هو 16؛ ثم نعوض x الخاص بها في صيغة الميل الواحد.

$$(x - 4)^2 + (16 - 8)^2 = 80$$

$$(x - 4)^2 = 16$$

$$x = 0 \quad \text{or} \quad x = 8$$

$$B = (8, 16)$$

$$y - 16 = 1(x - 8)$$

$$y = x + 8$$

الجواب النهائي
معادلة BC

$$y = x + 8$$

ب(2) • الرأس C

نعوض $y = x + 8$ بالدائرة؛ الجذر $x = 8$ يعود إلى B، والجذر الثاني هو C.

$$(x - 4)^2 + x^2 = 80$$

$$2x^2 - 8x + 16 = 80$$

$$x^2 - 4x - 32 = 0$$

$$(x - 8)(x + 4) = 0$$

$$x_C = -4$$

$$y_C = -4 + 8 = 4$$

الجواب النهائي
إحداثيات C

$$C = (-4, 4)$$

ج • الزاوية ACB

ميل CA يساوي 3 وميل CB يساوي 1؛ الزاوية المطلوبة هي فرق زاويتي الميل.

$$m_{CA} = \frac{16 - 4}{0 - (-4)} = \frac{12}{4} = 3$$

$$m_{CB} = \frac{16 - 4}{8 - (-4)} = \frac{12}{12} = 1$$

$$\angle ACB = \arctan(3) - \arctan(1)$$

$$\angle ACB \approx 71.565^\circ - 45^\circ = 26.565^\circ$$

الجواب النهائي
مقدار الزاوية ACB

$$\angle ACB \approx 26.565^\circ$$

د ٠ نصف قطر دائرة AEC

من صيغة نصف قطر الدائرة المحيطة $R = abc/(4S)$ ؛ نأخذ المساحة من المحدد أو من القاعدة والارتفاع.

$$E = \left(\frac{8 + (-4)}{2}, \frac{16 + 4}{2} \right) = (2, 10)$$

$$AE = \sqrt{2^2 + (-6)^2} = 2\sqrt{10}$$

$$EC = \sqrt{(-6)^2 + (-6)^2} = 6\sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(-4)^2 + (-12)^2} = 4\sqrt{10}$$

$$S_{AEC} = \frac{1}{2} |2(-12) - (-6)(-4)| = 24$$

$$R = \frac{(2\sqrt{10})(6\sqrt{2})(4\sqrt{10})}{4(24)} = 5\sqrt{2}$$

الجواب النهائي
نصف قطر الدائرة المحيطة بـ AEC

$$R = 5\sqrt{2}$$

السؤال 6 • بحث الدالة النسبية والمشتقة

وللدوال النسبية وللدوال الجذر

6. معطاة الدالة $f(x) = \frac{x+4}{5x-x^2} - b$ ، b هو پارامتر .

أ. جدوا مجال تعريف الدالة $f(x)$.

ب. جدوا إحداثيات النقاط القصوى للدالة $f(x)$ ، وحددوا نوع هذه النقاط (عبروا بدلالة b ، إذا دعت الحاجة) .

معطى أن المستقيم $y = -1$ يمسّ الرسم البياني للدالة $f(x)$ في نقطة نهايتها الصغرى .

ج. جدوا b .

عوضوا $b = 2$ في الدالة $f(x)$ ، وأجيبوا عن البندين "د-هـ" .

د. (1) جدوا معادلات خطوط التقارب المعامدة للمحورين ، للدالة $f(x)$.

(2) جدوا إحداثيات نقاط تقاطع الرسم البياني للدالة $f(x)$ مع المحورين (إذا وجدت مثل هذه النقاط) .

(3) ارسنوا رسماً بيانياً تقريبياً للدالة $f(x)$.

معطاة الدالة $g(x)$ ، التي دالة مشتقتها تحقق $g'(x) = f(x) + 1$.

مجال تعريف الدالة $g(x)$ هو نفس مجال تعريف الدالة $f(x)$.

هـ. حددوا هل توجد للدالة $g(x)$ نقاط قصوى . علّلوا تحديدكم .

أ • مجال التعريف

المقام $5x-x^2$ يجب ألا يساوي الصفر.

$$f(x) = \frac{x+4}{5x-x^2} - b$$

$$5x-x^2 = x(5-x)$$

$$x(5-x) \neq 0$$

$$x \neq 0, \quad x \neq 5$$

الجواب النهائي
مجال التعريف

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 5\}$$

ب • النقاط القصوى بدلالة b

مشتقة البسط ضرب المقام، ناقص مشتقة المقام ضرب البسط؛ الكل على مربع المقام. إزاحة b لا تغيّر موضع x .

$$f'(x) = \frac{(1)(5x-x^2) - (5-2x)(x+4)}{(5x-x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{5x - x^2 - (5x + 20 - 2x^2 - 8x)}{(5x - x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 8x - 20}{(5x - x^2)^2} = \frac{(x + 10)(x - 2)}{(5x - x^2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \implies x = -10 \text{ or } x = 2$$

$$f(-10) = \frac{-6}{-150} - b = \frac{1}{25} - b$$

$$f(2) = \frac{6}{6} - b = 1 - b$$

الجواب النهائي
عظمى عند -10 وصغرى عند 2

$$(-10, 1/25 - b), (2, 1 - b)$$

ج . قيمة b من المماس

عند $x=2$ مشتقة الدالة صفر، والمماس الأفقي $y=-1$ يساوي ارتفاع النهاية الصغرى.

$$f(2) = 1 - b$$

$$1 - b = -1$$

$$-b = -2$$

$$b = 2$$

الجواب النهائي
قيمة البارامتر

$$b = 2$$

د(1) . خطوط التقارب

بالتعويض $b=2$ يبقى البسط الأصلي غير صفر عند جذري المقام؛ والحد الكسري يقترب من الصفر في اللانهاية.

$$f(x) = \frac{x + 4}{x(5 - x)} - 2$$

$$x = 0, \quad x = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x + 4}{5x - x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -2$$

الجواب النهائي
خطوط التقارب

$$x = 0, \quad x = 5, \quad y = -2$$

د(2) . تقاطعات المحورين

لا تقاطع مع محور y لأن $x=0$ خارج المجال؛ حلول التقاطع مع محور x لا تصغر المقام.

$$\frac{x+4}{5x-x^2} - 2 = 0$$

$$x+4 = 2(5x-x^2)$$

$$2x^2 - 9x + 4 = 0$$

$$(2x-1)(x-4) = 0$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ or } x = 4$$

الجواب النهائي
تقاطعا x؛ لا يوجد تقاطع y

(1/2, 0), (4, 0)

د(3) • رسم تقريبي

يوجد فرع على كل من المجالات $x < 0$ و $0 < x < 5$ و $x > 5$ ؛ الفرع الأوسط يبدأ من $+\infty$ وينتهي إلى $+\infty$ وتوجد له نهاية صغرى عند $(-1, 2)$.

$$(-10, -49/25)$$

$$(2, -1)$$

$$(1/2, 0), (4, 0)$$

$$x = 0, \quad x = 5, \quad y = -2$$

الجواب النهائي
معطيات الرسم المطلوبة

(-10, -49/25), (2, -1)

هـ . هل g ذات نقاط قصوى؟

بسّطوا $g'=f+1$ ، ثم اخصوا إشارة المقام؛ $x=2$ جذر مزدوج فلا تنقلب إشارة المشتقة عنده.

$$g'(x) = f(x) + 1 = \frac{x+4}{x(5-x)} - 1$$

$$g'(x) = \frac{x+4-x(5-x)}{x(5-x)} = \frac{(x-2)^2}{x(5-x)}$$

$$g'(x) < 0 \ (x < 0), \quad g'(x) > 0 \ (0 < x < 2), \quad g'(x) > 0 \ (2 < x < 5), \quad g'(x) < 0 \ (x > 5)$$

الجواب النهائي
لا توجد نقاط قصوى للدالة g

$$g'(2) = 0$$

السؤال 7 • دالة جذر ومشتقتها

7. معطاة الدالة $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{5 - \frac{x}{2}} + 5$.

أ. جدوا مجال تعريف الدالة $f(x)$.

ب. جدوا إحداثيات نقاط تقاطع الرسم البياني للدالة $f(x)$ مع المحورين .

ج. جدوا إحداثيات جميع النقاط القصوى للدالة $f(x)$ ، وحددوا نوع هذه النقاط .

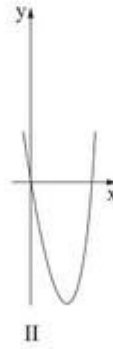
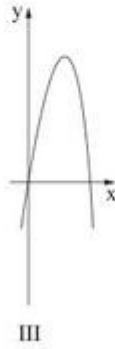
د. ارسموا رسماً بيانياً تقريبياً للدالة $f(x)$.

هـ. أحد الرسوم البيانية IV-I التي في آخر السؤال يصف الرسم البياني لدالة المشتقة $f'(x)$. حددوا أيها منها، وعلّلوا تحديدكم .

معطى أن المساحة المحصورة بين الرسم البياني لدالة المشتقة $f'(x)$ والرسم البياني للدالة $a \cdot f'(x)$ ، تساوي 160 .

ا. هو پارامتر سالب .

و. جدوا قيمة a .



أ • مجال التعريف

الجذر التربيعي موجود للمقدار غير السالب فقط.

$$f(x) = x^2 \sqrt{5 - \frac{x}{2}}$$

$$5 - \frac{x}{2} \geq 0$$

$$10 - x \geq 0$$

$$x \leq 10$$

الجواب النهائي
مجال التعريف

$$D_f = (-\infty, 10]$$

ب • تقاطعات المحورين

قيمة الدالة عند $x=0$ صفر، والجذر ينعدم عند $x=10$ وهو طرف المجال.

$$f(x) = 0 \iff x^2 = 0 \text{ or } 5 - \frac{x}{2} = 0$$

$$x = 0 \text{ or } x = 10$$

$$f(0) = 0$$

الجواب النهائي
نقطتا التقاطع مع المحورين

$$(0, 0), (10, 0)$$

ج . جميع النقاط القصوى

داخل المجال نفاضل بالقاعدة المركبة. الإشارة سالبة قبل 0، موجبة بين 0 و 8، وسالبة بين 8 و 10؛ يُفحص طرف المجال أيضاً.

$$f'(x) = 2x\sqrt{5 - \frac{x}{2}} - \frac{x^2}{4\sqrt{5 - \frac{x}{2}}}$$

$$f'(x) = \frac{8x(5 - x/2) - x^2}{4\sqrt{5 - x/2}}$$

$$f'(x) = \frac{40x - 5x^2}{4\sqrt{5 - x/2}} = \frac{5x(8 - x)}{4\sqrt{5 - x/2}}$$

$$f'(x) = 0 \implies x = 0 \text{ or } x = 8$$

$$f(0) = 0, \quad f(8) = 64\sqrt{1} = 64, \quad f(10) = 0$$

الجواب النهائي

صغرى عند 0 وعند الطرف 10؛ عظمى عند 8

$$(0, 0), (8, 64), (10, 0)$$

د . رسم تقريبي للدالة

الدالة غير سالبة ومستمرة حتى الطرف $x=10$ ؛ تنزل من قيم كبيرة إلى $(0,0)$ ، تصعد إلى $(8,64)$ ، ثم تنزل إلى $(10,0)$.

$$f'(x) < 0 \quad (x < 0)$$

$$f'(x) > 0 \quad (0 < x < 8)$$

$$f'(x) < 0 \quad (8 < x < 10)$$

الجواب النهائي

معطيات الرسم التقريبي

$$(0, 0) \rightarrow (8, 64) \rightarrow (10, 0)$$

هـ . رسم المشتقة الصحيح

الرسم الصحيح يقطع محور x عند الأصل وعند قيمة موجبة، ويقع أسفل المحور قبل الأصل وبعد الجذر الموجب، وفوقه بينهما.

$$f'(0) = 0, \quad f'(8) = 0$$

$$f'(x) < 0 \quad (x < 0), \quad f'(x) > 0 \quad (0 < x < 8), \quad f'(x) < 0 \quad (8 < x < 10)$$

و . قيمة a من المساحة

المشتقتان 'f و 'a·f تتساويان حين f'=0، أي عند 0 و8؛ وبينهما 'f موجب و a سالب، فمساحة الفرق (a-1) مضروبة في تكامل f.

$$f'(x) = af'(x) \implies (1-a)f'(x) = 0$$

$$x = 0 \text{ or } x = 8$$

$$S = \int_0^8 (f'(x) - af'(x)) dx$$

$$S = (1-a)(f(8) - f(0)) = (1-a)(64 - 0)$$

$$64(1-a) = 160$$

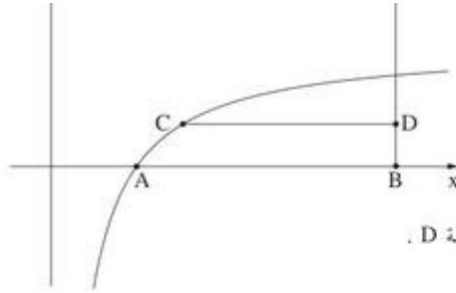
$$1-a = \frac{160}{64} = \frac{5}{2}$$

$$a = -\frac{3}{2}$$

الجواب النهائي
قيمة البارامتر a

$$a = -\frac{3}{2}$$

السؤال 8 . مساحة مثلث تحت دالة نسبية



- في المجال $x > 0$.
- الرسم البياني للدالة $f(x)$ يقطع المحور x في النقطة A .
- مرروا عموداً على المحور x من النقطة $B(8, 0)$.
- C هي نقطة ما على الرسم البياني للدالة $f(x)$.
- نرمز بـ t إلى الإحداثي x للنقطة C ، $2 < t < 8$.
- مرروا من النقطة C مستقيماً يوازي المحور x ويقطع العمود في النقطة D .
- أ. جدوا إحداثيات النقاط A و C و D .
- عبّروا عن إجاباتكم بدلالة t ، إذا دعت الحاجة.
- ب. جدوا إحداثيات النقطة C التي بالنسبة لها تكون مساحة المثلث ACD أكبر ما يمكن.
- ج. حدّدوا إذا كان من الممكن أن تكون مساحة المثلث ACD تساوي 1، علّلوا تحديدكم.

בהצלחה!

נשמתי לכם התנח!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל.
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך.
חقوق الطبع محفوظة לדولة إسرائيل.
النسخ أو النشر ممنوعان إلا بإذن من وزارة التربية والتعليم.

أ . إحداثيات A و C و D

صفر الدالة عند $x=2$. للنقطة C الإحداثي الأفقي t ، والنقطة D على العمود $x=8$ وعلى الارتفاع نفسه.

$$f(x) = 3 - \frac{6}{x}, \quad x > 0$$

$$3 - \frac{6}{x} = 0 \implies x = 2$$

$$C = \left(t, 3 - \frac{6}{t}\right), \quad 2 < t < 8$$

$$D = \left(8, 3 - \frac{6}{t}\right)$$

الجواب النهائي إحداثيات النقاط

$$A = (2, 0), \quad C = \left(t, 3 - \frac{6}{t}\right), \quad D = \left(8, 3 - \frac{6}{t}\right)$$

ب . أكبر مساحة

طول القاعدة الأفقية $8-t$ وارتفاع المثلث $3 - \frac{6}{t}$ ؛ اشتقوا على المجال المفتوح $2 < t < 8$.

$$CD = 8 - t, \quad h = 3 - \frac{6}{t}$$

$$S(t) = \frac{1}{2}(8 - t) \left(3 - \frac{6}{t} \right)$$

$$S(t) = \frac{3}{2} \left(10 - t - \frac{16}{t} \right)$$

$$S'(t) = \frac{3}{2} \left(-1 + \frac{16}{t^2} \right)$$

$$S'(t) = 0 \implies t^2 = 16 \implies t = 4$$

$$S(4) = \frac{1}{2}(4) \left(3 - \frac{6}{4} \right) = 3$$

الجواب النهائي
موضع C عند أكبر مساحة

$$C = (4, 3/2), \quad S_{\max} = 3$$

ج. هل المساحة 1 ممكنة؟

قيمة 1 تقع بين الصفر وأكبر مساحة 3؛ لإعطاء برهان حسابي نحل $S(t)=1$ ونختبر الجذرين.

$$\frac{3}{2} \left(10 - t - \frac{16}{t} \right) = 1$$

$$30t - 3t^2 - 48 = 2t$$

$$3t^2 - 28t + 48 = 0$$

$$t = \frac{28 \pm \sqrt{28^2 - 4(3)(48)}}{6}$$

$$t = \frac{14 \pm 2\sqrt{13}}{3} \approx 2.263, 7.070$$

$$2 < 2.263 < 8, \quad 2 < 7.070 < 8$$

الجواب النهائي
نعم، يوجد موضعان للنقطة C

$$S = 1$$