

حلول امتحان البجروت 35471

صيف 2024 · الموعد أ · النموذج العربي الرسمي · النسخة أ

حلول عربية مفصلة، مع فصل الجواب النهائي عن خطوات الحساب.

حلول تعليمية أصلية وليست حلولاً رسمية للوزارة.

حقوق النشر والطباعة | mathbagrut.com

© 2026 mathbagrut.com — حقوق الشرح والحلول والتصميم محفوظة. الطباعة التعليمية الشخصية أو الصفية مسموحة مع إبقاء

اسم الموقع. إعادة النشر أو البيع تحتاج إذناً خطياً.

نص السؤال من امتحان وزارة التربية والتعليم؛ حقوق النص الأصلي والرسوم للوزارة. الحلول تعليمية مستقلة وليست حلاً رسمياً.

السؤال 1 • التوزيع الطبيعي لأطوال الخيار

1. في مصنع معيّن يُعلَبون الخياريات حسب طولها، أطوال الخياريات تتوزّع طبيعيًا، جميع الخياريات التي طولها أقل من 12 سم، تُعلَب في علَب حفظ عادية. بقية الخياريات تُعلَب في علَب حفظ كبيرة.
- معلوم أنّ معدل أطوال الخياريات هو 10.56 سم، والانحراف المعياريّ هو 3 سم.
- أ. جدوا النسبة المئوية للخياريات التي تُعلَب في علَب حفظ عادية.
- تبيّن أنّ هناك طلبًا للخياريات القصيرة بشكل خاص، لذا تقرر بأن تمرر الخياريات بتصنيف من جديد.
- وجد أنّ ربع الخياريات التي طولها أقل من 12 سم، تُعتبر خياريات قصيرة بشكل خاص.
- ب. (1) جدوا النسبة المئوية للخياريات القصيرة بشكل خاص.
- (2) جدوا طول أطول خيارية من بين الخياريات القصيرة بشكل خاص.
- بعد مرور وقت معيّن، وصلت إلى المصنع شحنة جديدة من الخياريات. في هذه الشحنة أيضًا، أطوال الخياريات تتوزّع طبيعيًا.
- 50% من الخياريات في هذه الشحنة كانت أقصر من 11.5 سم.
- 12.5% من الخياريات في هذه الشحنة كانت أطول من 14.26 سم.
- ج. جدوا الانحراف المعياريّ لأطوال الخياريات في الشحنة الجديدة.

أ • نسبة العلب العادية

إذا رمزنا إلى الطول بـ X ، فإن احتمال العلبة العادية هو المساحة يسار 12 على منحنى التوزيع الطبيعي.

$$X \sim N(10.56, 3^2)$$

$$z = \frac{12 - 10.56}{3} = \frac{1.44}{3} = 0.48$$

$$P(X < 12) = P(Z < 0.48) = 0.6844$$

$$0.6844 \cdot 100\% = 68.44\%$$

الجواب النهائي
النسبة المئوية للعلب العادية

68.44%

ب(1) • نسبة الخيار القصير جدًا

مجموعة الخيار القصير جدًا تمثل ربع ما طوله دون 12 سم، فلا نأخذ ربع مجموع المصنع.

$$P(X < 12) = 0.6844$$

$$P(\text{short}) = \frac{1}{4} (0.6844) = 0.1711$$

$$0.1711 \cdot 100\% = 17.11\%$$

الجواب النهائي
نسبة الخيار القصير جدًا

17.11%

ب(2) . الحد الأعلى للطول القصير جدًا

نبحث عن العلامة المعيارية التي تقابل مساحة 0.1711 من يسارها؛ من جدول التوزيع الطبيعي $z \approx -0.95$.

$$P(X < L) = 0.1711$$

$$P(Z < z) = 0.1711 \implies z \approx -0.95$$

$$\frac{L - 10.56}{3} = -0.95$$

$$L - 10.56 = -2.85$$

$$L = 7.71$$

الجواب النهائي

حد الطول الأعلى للفئة القصيرة جدًا

$$L \approx 7.71 \text{ cm}$$

ج . الانحراف المعياري للشحنة الجديدة

في التوزيع الطبيعي الوسيط يساوي المعدل؛ لذا المعدل الجديد 11.5 سم. مساحة 87.5% يسار 14.26 تقابل $z \approx 1.15$.

$$P(X < 11.5) = 0.5 \implies \mu_{\text{new}} = 11.5$$

$$P(X > 14.26) = 0.125 \implies P(X < 14.26) = 0.875$$

$$P(Z < 1.15) \approx 0.875$$

$$\frac{14.26 - 11.5}{\sigma_{\text{new}}} = 1.15$$

$$\sigma_{\text{new}} = \frac{2.76}{1.15} = 2.4$$

الجواب النهائي

الانحراف المعياري الجديد

$$\sigma_{\text{new}} \approx 2.4 \text{ cm}$$

السؤال 2 . الارتباط والانحدار لمصروف الوقود

2. أجرت خبيرة في علم الإحصاء بحثاً في أوساط متزوجين .
قرّرت الخبيرة أن تفحص العلاقة بين عدد أولاد الزوج (رجل وامرأة) (المتغير x) وبين المصروف الشهري على الوقود لدى الزوج (المتغير y) .
لهذا الغرض ، أخذت عينة من 4 أزواج من مجتمع معطياتها :
- زوج بدون أولاد ، مصروفه الشهري على الوقود هو 1,500 شيكل .
- زوج لديه ولد واحد ، مصروفه الشهري على الوقود هو 1,800 شيكل .
- زوج لديه ثلاثة أولاد ، مصروفه الشهري على الوقود هو 2,900 شيكل .
- زوج لديه أربعة أولاد ، مصروفه الشهري على الوقود هو 3,800 شيكل .
أ . ارسموا المخطط المبعثر (رسم بياني مع نقاط) الذي يلائم أربعة الأزواج الذين في العينة . اكتبوا قيم النقاط على المحورين .
حسبت الخبيرة الإحصائية الانحراف المعياري للمتغير y وحصلت على أن $S_y = \sqrt{835,000}$.
ب . (1) جدوا معدل عدد الأولاد للزوج في العينة ومعدل المصروف الشهري على الوقود للزوج في العينة .
(2) احسبوا معامل التناسب (مقدّم التماسك) بين المتغيرين .
ج . جدوا معادلة مستقيم الانحدار (يשר الانحدار) للنتيجة بالمصروف الشهري على الوقود حسب عدد الأولاد .
في أعقاب ارتفاع أسعار الوقود ، ارتفع بـ 6% المصروف الشهري لكل واحد من الأزواج على الوقود .
د . بالنسبة لكل واحد من المقياسين اللذين أمامكم ، حدّدوا إذا كانت قيمته قد كبرت أم صغرت أم لم تتغير .
(1) الانحراف المعياري للمتغير y .
(2) معامل التناسب r .

أ . نقاط المخطط المبعثر

كل زوج يقابله موضع واحد؛ اكتبوا على المحور الأفقي عدد الأولاد، وعلى الرأس المصروف الشهري بالشواكل.

$$(x_i, y_i) = (0, 1500), (1, 1800), (3, 2900), (4, 3800)$$
$$0 \leq x \leq 4, \quad 1500 \leq y \leq 3800$$

الجواب النهائي
النقاط الأربع للمخطط

$$(0, 1500), (1, 1800), (3, 2900), (4, 3800)$$

ب(1) . المعدل

نحسب المعدل لكل متغير على حدة؛ وحدة y شيكل شهرياً.

$$\bar{x} = \frac{0 + 1 + 3 + 4}{4} = \frac{8}{4} = 2$$
$$\bar{y} = \frac{1500 + 1800 + 2900 + 3800}{4}$$
$$\bar{y} = \frac{10000}{4} = 2500$$

الجواب النهائي
معدل الأولاد ومعدل المصروف

$$\bar{x} = 2, \quad \bar{y} = 2500$$

ب(2) · معامل الارتباط

الانحراف المعياري y معطى بجذر 835000. نحسب تغاير x و y على الأزواج الأربعة، ثم نقسم على حاصل ضرب الانحرافين.

$$s_x^2 = \frac{(0-2)^2 + (1-2)^2 + (3-2)^2 + (4-2)^2}{4}$$

$$s_x^2 = \frac{4+1+1+4}{4} = 2.5$$

$$\text{Cov}(x, y) = \frac{(-2)(-1000) + (-1)(-700) + (1)(400) + (2)(1300)}{4}$$

$$\text{Cov}(x, y) = \frac{2000 + 700 + 400 + 2600}{4} = 1425$$

$$r = \frac{1425}{\sqrt{2.5} \sqrt{835000}} \approx 0.9863$$

الجواب النهائي
معامل ارتباط موجب وقوي

$$r \approx 0.9863$$

ج · مستقيم الانحدار

مستقيم التنبؤ بالمصروف y حسب عدد الأولاد x يمر بالنقطة $(\bar{x}, \bar{y})$.

$$b = \frac{\text{Cov}(x, y)}{s_x^2} = \frac{1425}{2.5} = 570$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} = 2500 - 570(2) = 2500 - 1140 = 1360$$

$$\hat{y} = bx + a = 570x + 1360$$

الجواب النهائي
معادلة مستقيم الانحدار

$$\hat{y} = 570x + 1360$$

د(1) · تغير الانحراف المعياري

الزيادة النسبية موحدة لكل العينة؛ نضرب كل قيمة y في 1.06، ولذلك يضرب انحرافها المعياري في المعامل الموجب نفسه.

$$y_{\text{new}} = 1.06y$$

$$s_{y,\text{new}} = 1.06s_y$$

$$s_{y,\text{new}} = 1.06\sqrt{835000} > \sqrt{835000}$$

الجواب النهائي
كبير الانحراف المعياري

$$s_{y,\text{new}} = 1.06s_y$$

د(2) • تغير معامل الارتباط

ضرب y بعدد موجب يضرب التغير s_y في العدد نفسه، فتختزل الزيادة في نسبة r .

$$\text{Cov}(x, 1.06y) = 1.06 \text{Cov}(x, y)$$

$$s_{1.06y} = 1.06s_y$$

$$r_{\text{new}} = \frac{1.06 \text{Cov}(x, y)}{s_x(1.06s_y)} = r$$

الجواب النهائي
لم يتغير معامل الارتباط

$$r_{\text{new}} = r \approx 0.9863$$

السؤال 3 . احتمال تجديد الشقق وإطالتها

3. في مجمع سكني، هناك نوعان من الشقق - شقق تُطلُّ على المتنزه، وشقق تطلُّ على الشارع. الاحتمال بأن تكون الشقة في المجمع السكني تطلُّ على المتنزه هو $\frac{3}{4}$.
قسم من الشقق في المجمع مُرمَّم، والباقي ليس مُرمَّمًا.
عدد الشقق المُرمَّمة هو 4 أضعاف عدد الشقق غير المُرمَّمة.
28% من الشقق التي تطلُّ على الشارع هي شقق مُرمَّمة.
أ. يختارون بشكل عشوائي شقة من بين جميع الشقق في المجمع.
(1) ما هو الاحتمال بأن يختاروا شقة مُرمَّمة؟
(2) ما هو الاحتمال بأن يختاروا شقة تطلُّ على الشارع ومُرمَّمة أيضًا؟
ب. يختارون بشكل عشوائي شقة من بين الشقق غير المُرمَّمة.
ما هو الاحتمال بأن تكون هذه الشقة تطلُّ على الشارع؟
35 شقة في المجمع تطلُّ على الشارع ومُرمَّمة أيضًا.

أ(1) . احتمال شقة مُرمَّمة

لكل شقة غير مُرمَّمة أربع شقق مُرمَّمة؛ من أصل خمسة أجزاء أربعة مجددة.

الإطالة مُرمَّمة غير مُرمَّمة المجمع

الشارع 0.25 0.18 0.07

المتنزه 0.75 0.02 0.73

المجمع 1 0.20 0.80

$$N_R = 4N_{\bar{R}}$$

$$N_R + N_{\bar{R}} = 5N_{\bar{R}}$$

$$P(R) = \frac{4N_{\bar{R}}}{5N_{\bar{R}}} = \frac{4}{5} = 0.8$$

الجواب النهائي
احتمال الشقة المُرمَّمة

$$P(R) = 0.8$$

أ(2) . الشارع والتجديد معًا

احتمال الشارع هو متمم احتمال المتنزه؛ و28% من شقق الشارع مُرمَّمة.

$$P(S) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$P(R | S) = 0.28$$

$$P(S \cap R) = P(S)P(R | S) = 0.25(0.28) = 0.07$$

الجواب النهائي
احتمال الشارع والتجديد

$$P(S \cap R) = 0.07$$

ب. احتمال الشارع بشرط عدم التجديد

الشارع مجموعه 0.25، والمتجدد منه 0.07؛ وغير المجدد عموماً 0.20.

$$P(S \cap \bar{R}) = P(S) - P(S \cap R) = 0.25 - 0.07 = 0.18$$

$$P(\bar{R}) = 1 - 0.8 = 0.2$$

$$P(S | \bar{R}) = \frac{P(S \cap \bar{R})}{P(\bar{R})} = \frac{0.18}{0.2} = 0.9$$

الجواب النهائي
الاحتمال المشروط

$$P(S | \bar{R}) = 0.9$$

ج . عدد شقق المتنزه المرممة

35 شقة تمثل 7% من المجموع. ونطرح شقق الشارع المرممة من جميع المرممة.

$$0.07N = 35$$

$$N = \frac{35}{0.07} = 500$$

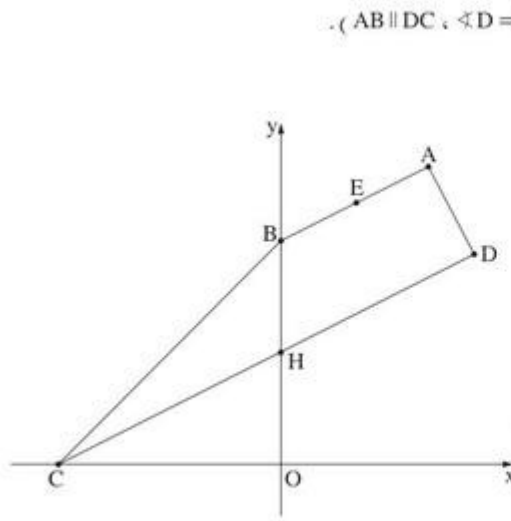
$$P(P \cap R) = P(R) - P(S \cap R) = 0.8 - 0.07 = 0.73$$

$$N_{P \cap R} = 0.73(500) = 365$$

الجواب النهائي
عدد شقق المتنزه المرممة

$$N_{P \cap R} = 365$$

السؤال 4 • شبه منحرف قائم في المستوى الإحداثي



4. في الرسم الذي أمامكم شبه منحرف قائم الزاوية ABCD ($AB \parallel DC$ ، $\angle D = 90^\circ$) .

الرأس B يقع على المحور y ، والرأس C يقع على

الجزء السالب للمحور x .

القاعدة CD تقطع المحور y في النقطة H .

معطى أن: النقطة E(2, 7) تقع على القاعدة AB .

معادلة ساق شبه المنحرف AD هي $y = -2x + 16$.

أ. جدوا إحداثيات الرأس B .

معطى أن طول الساق BC لشبه المنحرف هو $\sqrt{72}$.

ب. جدوا إحداثيات الرأس C .

ج. جدوا مقدار الزاوية CBO (O هي نقطة أصل المحاور) .

د. (1) جدوا معادلة المستقيم CD .

(2) جدوا مقدار الزاوية CHB .

هـ. احسبوا مساحة المثلث CBE .

أ. الرأس B

بما أن AD عمودية على CD و CD توازي AB، فبيل AB هو المقلوب السالب لميل AD، أي نصف. نمر بالنقطة E.

$$m_{AD} = -2$$

$$AB \parallel CD \perp AD \Rightarrow m_{AB} = \frac{1}{2}$$

$$y - 7 = \frac{1}{2}(x - 2)$$

$$y = \frac{1}{2}x + 6$$

$$x_B = 0 \Rightarrow y_B = 6$$

الجواب النهائي
إحداثيات الرأس B

$$B = (0, 6)$$

ب. الرأس C

C على المحور x في جهته السالبة، وإحداثي B الرأس 6.

$$C = (c, 0), \quad c < 0$$

$$BC = \sqrt{72}$$

$$BC^2 = (c - 0)^2 + (0 - 6)^2 = c^2 + 36 = 72$$

$$c^2 = 36$$

$$c = -6$$

الجواب النهائي
إحداثيات الرأس C

$$C = (-6, 0)$$

ج . الزاوية CBO

BO رأسي إلى الأسفل؛ من B إلى C تتحرك 6 وحدات يساراً و6 أسفل، فيتكون مثلث قائم متساوي الساقين.

$$\vec{BC} = (-6, -6), \quad \vec{BO} = (0, -6)$$

$$\tan(\angle CBO) = \frac{6}{6} = 1$$

$$\angle CBO = 45^\circ$$

الجواب النهائي
قياس الزاوية CBO

$$45^\circ$$

د(1) . مستقيم CD

قاعدة CD لها ميل AB نفسه؛ نعوض C في معادلة مستقيم ميله نصف.

$$m_{CD} = m_{AB} = \frac{1}{2}$$

$$y - 0 = \frac{1}{2}(x + 6)$$

$$y = \frac{1}{2}x + 3$$

$$H = (0, 3)$$

الجواب النهائي
معادلة القاعدة

$$CD: y = \frac{1}{2}x + 3$$

د(2) . الزاوية CHB

من H إلى C تتحرك 6 يساراً و3 إلى الأسفل، بينما HB رأسي إلى الأعلى؛ الزاوية المطلوبة منفرجة.

$$\vec{HC} = (-6, -3), \quad \vec{HB} = (0, 3)$$

$$\tan \theta = \frac{6}{3} = 2$$

$$\theta = \arctan(2) \approx 63.435^\circ$$

$$\angle CHB = 180^\circ - \theta \approx 116.565^\circ$$

الجواب النهائي
قياس الزاوية CHB

$$\angle CHB \approx 116.57^\circ$$

هـ . مساحة CBE

النقاط هي $E(2,7)$ ، $B(0,6)$ ، $C(-6,0)$. نحسب نصف القيمة المطلقة للمحدد.

$$\vec{CB} = (6, 6), \quad \vec{CE} = (8, 7)$$

$$[CBE] = \frac{1}{2} |6 \cdot 7 - 6 \cdot 8|$$

$$[CBE] = \frac{1}{2} |42 - 48| = \frac{1}{2} (6) = 3$$

الجواب النهائي
وحدات مساحة

$$[CBE] = 3$$

السؤال 5 • دائرة ومماس وتشابه مثلثات

5. القطعة AB هي قطر في دائرة مركزها M .

القطعة CD تمس الدائرة في النقطة A .

النقطة B هي إحدى نقاط تقاطع الدائرة مع المحور y ،
كما هو موصوف في الرسم .

AM هو منتصف الزاوية CMD .

أ. برهنوا أن المثلث CMD هو متساوي الساقين.

معطى أن معادلة الدائرة هي $(x + 3)^2 + (y - 8)^2 = 45$

وَأَنَّ الْإِحْدَاثِيَّ y لِلنَّقْطَةِ B أَكْبَرُ مِنْ 8 .

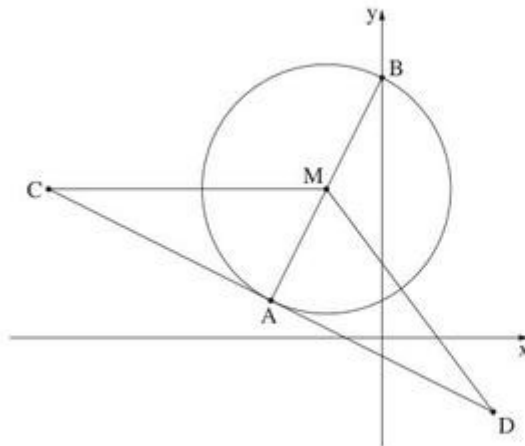
ب. جدوا إحداثيات النقطتين A و B .

معطى أنَّ القطعة CM توازي المحور x .

جـ. جدوا إحدائيات النقطة C .

النقطة E هي منتصف القطعة CM ، والنقطة F هي منتصف القطعة DM .

د. (1) برهتوانان: $\Delta \text{CMD} \sim \Delta \text{EMF}$.



أ. إثبات تساوي ساقَي CMD

AM منتصف الزاوية عند M، و MA عمودية على المستقيم المماس CD عند A. في المثلثين CMA و DMA زاويتان متساويتان والضلع

MA مشترك.

$$\angle CMA = \angle AMD$$

$$MA \perp CD \implies \angle CAM = \angle MAD = 90^\circ$$

$$MA = MA$$

$$\triangle CMA \cong \triangle DMA$$

$$CM = DM$$

الجواب النهائي

المثلث CMD متساوي الساقين

$$CM = DM$$

ب. أحداثيات A و B

مركز الدائرة $M = (-3, 8)$ ، و B على المحور y أعلى 8. بما أن AB قطر فالمرکز منتصف طرفيه.

$$(x + 3)^2 + (y - 8)^2 = 45$$

$$x_B = 0 \implies 9 + (y_B - 8)^2 = 45$$

$$(y_B - 8)^2 = 36 \implies y_B = 8 \pm 6$$

$$y_B > 8 \implies B = (0, 14)$$

$$M = \frac{A+B}{2} \implies A = 2M - B$$

$$A = 2(-3, 8) - (0, 14) = (-6, 2)$$

الجواب النهائي
الرأسان

$$B = (0, 14), \quad A = (-6, 2)$$

ج. إحدائيات C

ميل نصف القطر MA هو 2، فيكون ميل المماس سالب نصف. و CM أفقي، لذلك $y_C = 8$.

$$M = (-3, 8), \quad A = (-6, 2)$$

$$m_{MA} = \frac{2 - 8}{-6 + 3} = 2$$

$$m_{CD} = -\frac{1}{2}$$

$$y - 2 = -\frac{1}{2}(x + 6)$$

$$y = -\frac{1}{2}x - 1$$

$$8 = -\frac{1}{2}x_C - 1 \Rightarrow x_C = -18$$

الجواب النهائي
إحدائيات C

$$C = (-18, 8)$$

د(1). تشابه CMD و EMF

E منتصف CM و F منتصف DM؛ لذلك EF موازية لـ CD، ويتطابق رأس الزاوية عند M.

$$ME = \frac{1}{2}MC, \quad MF = \frac{1}{2}MD$$

$$EF \parallel CD$$

$$\frac{ME}{MC} = \frac{MF}{MD} = \frac{1}{2}$$

$$\triangle EMF \sim \triangle CMD$$

الجواب النهائي
المطلوب إثباته

$$\triangle CMD \sim \triangle EMF$$

د(2) . نسبة المساحتين

النسبة بين طول ضلع في CMD والضلع المناظر في EMF هي 2:1؛ نسبة المساحتين هي مربعها.

$$\frac{CM}{EM} = \frac{MD}{FM} = 2$$

$$\frac{[CMD]}{[EMF]} = \left(\frac{CM}{EM}\right)^2 = 2^2 = 4$$

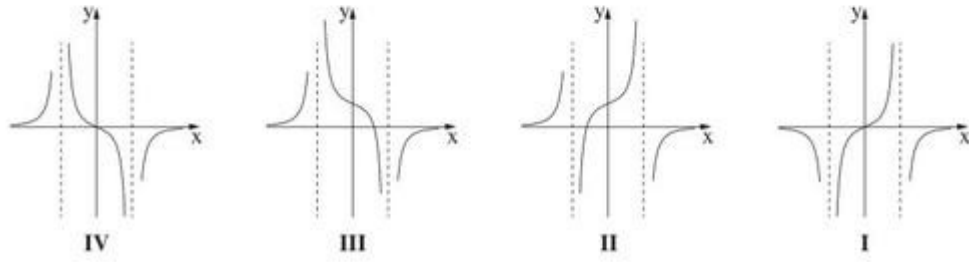
الجواب النهائي
نسبة المساحتين

$$[CMD] : [EMF] = 4 : 1$$

السؤال 6 • بحث الدالة النسبية ومشتقتها

6. معطاة الدالة $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 9} + 4$.

- أ. جدوا مجال تعريف الدالة $f(x)$.
 - ب. جدوا معادلات خطوط التقارب المعامدة للمحورين، للدالة $f(x)$.
 - ج. جدوا إحداثيات النقطة القصوى للدالة $f(x)$ ، وحددوا نوع هذه النقطة.
 - د. ارسموا رسمًا بيانيًا تقريبياً للدالة $f(x)$.
 - هـ. حددوا أي رسم بياني من الرسوم البيانية I-IV التي في آخر السؤال يصف دالة المشتقة $f'(x)$. علّلوا إجابتكم.
 - و. حددوا بالنسبة لكل واحد من القولين (1)-(2) اللذين أمامكم إذا كان صحيحاً أم غير صحيح. علّلوا تحديدكم.
- (1) في كل نقطة في المجال $x > 3$ ، ميل المماس للرسم البياني للدالة $f(x)$ هو موجب.
 - (2) في كل نقطة في المجال $x < -3$ ، ميل المماس للرسم البياني للدالة $f(x)$ هو موجب.



أ(1) • مجال التعريف

المقام هو فرق مربعين؛ لا يجوز انعدامه.

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 9} + 4$$

$$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$$

$$(x - 3)(x + 3) \neq 0 \implies x \neq -3, 3$$

الجواب النهائي
مجال التعريف

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$$

أ(2) • خطوط التقارب

البسط عند $x = \pm 3$ غير صفر، فهما تقاربان عموديان؛ ودرجتا البسط والمقام متساويتان.

$$\frac{2x^2}{x^2 - 9} = 2 + \frac{18}{x^2 - 9}$$

$$f(x) = 6 + \frac{18}{x^2 - 9}$$

$$x = -3, \quad x = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 6$$

الجواب النهائي التقاربات العمودية والأفقي

$$x = -3, \quad x = 3, \quad y = 6$$

ب . النقطة القصوى

مربع المقام موجب داخل المجال، فتحدد إشارة المشتقة بإشارة $-x$.

$$f'(x) = \frac{4x(x^2 - 9) - 2x^2(2x)}{(x^2 - 9)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4x^3 - 36x - 4x^3}{(x^2 - 9)^2} = -\frac{36x}{(x^2 - 9)^2}$$

$$f'(x) > 0 \quad (x < 0), \quad f'(x) < 0 \quad (x > 0)$$

$$f'(0) = 0, \quad f(0) = 4$$

الجواب النهائي نقطة عظمى داخلية

$$(0, 4)$$

ج . التقاطعات

عند تقاطع x نضرب في المقام مع المحافظة على الاستبعاد $x \neq \pm 3$.

$$\frac{2x^2}{x^2 - 9} + 4 = 0$$

$$2x^2 + 4(x^2 - 9) = 0$$

$$6x^2 - 36 = 0 \implies x^2 = 6$$

$$x = \pm\sqrt{6}$$

$$f(0) = 4$$

الجواب النهائي التقاطعات مع المحورين

$$(-\sqrt{6}, 0), (\sqrt{6}, 0), (0, 4)$$

د . الرسم التقريبي

للدالة أربعة فروع تفصلها $x = \pm 3$ ؛ تقترب من $y = 6$ بعيداً، وتقطع x عند $\pm\sqrt{6}$ ، وتبلغ عظمى $(0, 4)$.

$$f(x) = 6 + \frac{18}{x^2 - 9}$$

$$f(-x) = f(x)$$

$$f' > 0 \quad (x < 0), \quad f' < 0 \quad (x > 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -3^+} f = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f = +\infty$$

الجواب النهائي
معطيات الرسم التقريبي

$$f(-x) = f(x), \quad f(0) = 4, \quad x = \pm 3$$

هـ . الرسم الموافق للمشتقة

المشتقة تساوي صفراً عند 0؛ موجبة لكل $x < 0$ داخل المجال وسالبة لكل $x > 0$ ، وتؤول إلى $\pm\infty$ قرب 3- و3.

$$f'(x) = -\frac{36x}{(x^2 - 9)^2}$$

$$f'(x) > 0 \ (x < 0), \quad f'(x) < 0 \ (x > 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f'(x) = 0$$

الجواب النهائي
الرسم IV

IV

و(1) . الميل يمين $x=3$

لأن x موجب والمقام مربع موجب، فإن $-36x/(x^2-9)^2$ سالب.

$$x > 3 \implies -36x < 0$$

$$(x^2 - 9)^2 > 0$$

$$f'(x) < 0$$

الجواب النهائي
القول غير صحيح

$$f'(x) < 0 \quad (x > 3)$$

و(2) . الميل يسار $x=-3$

إذا $x < -3$ فإن $-36x$ موجب والمقام مربع موجب.

$$x < -3 \implies -36x > 0$$

$$(x^2 - 9)^2 > 0$$

$$f'(x) > 0$$

الجواب النهائي
القول صحيح

$$f'(x) > 0 \quad (x < -3)$$

السؤال 7 • دالة الجذر وتحليل مشتقتها

7. معطاة الدالة $f(x) = \sqrt{5-2x} + bx$ ، $b > 0$ هو بارامتر .
- أ. جدوا قيمة b .
- ب. عوّضوا $b = \frac{1}{2}$ في الدالة $f(x)$ ، وأجيبوا عن البنود "ب-و" .
- ج. جدوا مجال تعريف الدالة $f(x)$.
- د. جدوا إحداثيات نقطة تقاطع الرسم البياني للدالة $f(x)$ مع المحور y .
- هـ. جدوا إحداثيات جميع النقاط القصوى للدالة $f(x)$ ، وحددوا نوع هذه النقاط .
- و. ارسموا رسماً بيانياً تقريبياً للدالة $f(x)$.
- معطاة الدالة $g(x)$ ، التي تحقق $g'(x) = -f(x)$. الدالتان $f(x)$ و $g(x)$ معرفتان في نفس المجال .
- ز. جدوا الإحداثي x للنقطة القصوى الداخلية للدالة $g(x)$ ، وحددوا نوع هذه النقطة . علّلوا إجاباتكم .

أ • قيمة b

عند $x = -10$ تكون قيمة الجذر $\sqrt{5-2x} = 5$ ؛ نسوي f بالصفر.

$$\begin{aligned}f(x) &= \sqrt{5-2x} + bx \\0 &= f(-10) = \sqrt{5+20} - 10b \\0 &= 5 - 10b \\10b &= 5 \\b &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

الجواب النهائي
قيمة البارامتر

$$b = \frac{1}{2}$$

ب • مجال التعريف

المقدار تحت الجذر يجب ألا يكون سالباً.

$$\begin{aligned}5 - 2x &\geq 0 \\-2x &\geq -5 \\x &\leq \frac{5}{2}\end{aligned}$$

الجواب النهائي
مجال التعريف

$$D_f = (-\infty, \frac{5}{2}]$$

ج . تقاطع محور y

البارامتر $b=1/2$ والحد الخطي ينعدم عند صفر.

$$f(0) = \sqrt{5-0} + \frac{1}{2}(0) = \sqrt{5}$$

الجواب النهائي
تقاطع محور y

$$(0, \sqrt{5})$$

د . النقاط القصوى

إشارة المشتقة موجبة حتى $x=1/2$ ثم سالبة حتى الطرف $x=5/2$. الطرف المشمول أصغري محلياً باتجاه المجال.

$$f(x) = \sqrt{5-2x} + \frac{x}{2}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{5-2x}} + \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = 0 \implies \sqrt{5-2x} = 2$$

$$5-2x = 4 \implies x = \frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = 0 + \frac{5}{4} = \frac{5}{4}$$

الجواب النهائي
عظمى داخلية، ثم صغرى طرفية

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right), \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{4}\right)$$

هـ . الرسم التقريبي

عند $x \rightarrow -\infty$ يهيمن الحد $x/2$ السليبي، ثم يقطع المنحنى محور x عند -10 ، يبلغ العظمى الداخلية، وينتهي عند الطرف.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$f(-10) = 0$$

$$f(0) = \sqrt{5}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}$$

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{4}$$

الجواب النهائي
نقاط الرسم الأساسية

$$(-10, 0), \quad (0, \sqrt{5}), \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right), \quad \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{4}\right)$$

و • تطرف g حيث $g' = -f$

g' يساوي -f، لذا ينعدم عند تقاطع f مع محور x. قبل -10 تكون f سالبة فتكون g' موجبة، وبعده f موجبة فتكون g' سالبة.

$$g'(x) = -f(x)$$

$$f(-10) = 0 \implies g'(-10) = 0$$

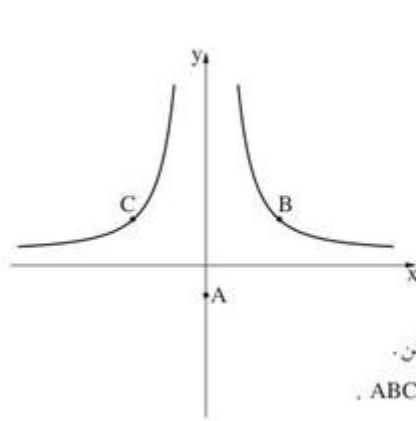
$$x < -10 : f(x) < 0 \implies g'(x) > 0$$

$$-10 < x \leq \frac{5}{2} : f(x) > 0 \implies g'(x) < 0$$

الجواب النهائي
نقطة عظمى داخلية للدالة g

$$x = -10$$

السؤال 8 . المساحة الصغرى لمثلث بين فرعي الدالة



8. معطاة الدالة $f(x) = \frac{48}{x^2} + 1$.

معطاة النقطة A ، التي إحداثياتها هي $(0, -2)$.

النقطتان B و C تقعان على الرسم البياني للدالة $f(x)$ ،

كما هو موصوف في الرسم .

المستقيم BC يوازي المحور x .

نرمز بـ t إلى الإحداثي x للنقطة B ، $t > 0$.

أ . عبروا بدلالة t عن إحداثيات النقطتين B و C .

ب . جدوا قيمة t التي بالنسبة لها مساحة المثلث ABC هي أصغر ما يمكن .

ج . بالنسبة لقيمة t التي وجدتموها في البند "ب" ، جدوا محيط المثلث ABC .

أ . إحداثيات B و C

الدالة زوجية، وب عند $x=t>0$ ؛ بما أن BC أفقي فإن C له الارتفاع نفسه على الفرع الأيسر.

$$f(x) = \frac{48}{x^2} + 1$$

$$f(t) = \frac{48}{t^2} + 1$$

$$f(-t) = f(t)$$

$$B = \left(t, \frac{48}{t^2} + 1\right)$$

$$C = \left(-t, \frac{48}{t^2} + 1\right)$$

الجواب النهائي
الإحداثيات بدلالة t

$$B = (t, 48/t^2 + 1), \quad C = (-t, 48/t^2 + 1)$$

ب . أصغر مساحة

طول القاعدة الأفقية BC يساوي $2t$ ، وارتفاع $A(0, -2)$ إليها هو $t^2 + 3/48$ ؛ t موجب.

$$BC = t - (-t) = 2t$$

$$h = \frac{48}{t^2} + 1 - (-2) = \frac{48}{t^2} + 3$$

$$S(t) = \frac{1}{2}(2t) \left(\frac{48}{t^2} + 3\right) = \frac{48}{t} + 3t$$

$$S'(t) = -\frac{48}{t^2} + 3$$

$$S'(t) = 0 \implies t^2 = 16$$

$$t > 0 \implies t = 4$$

$$S''(t) = \frac{96}{t^3} > 0 \quad (t > 0)$$

الجواب النهائي
قيمة t التي تحقق أصغر مساحة

$$t = 4, \quad S_{\min} = \frac{48}{4} + 3(4) = 24$$

ج . محيط المثلث عند $t=4$

عند $t=4$ يكون ارتفاع النقطتين B و C أربع وحدات؛ وطول القاعدة 8، والساقان متساويان.

$$f(4) = \frac{48}{16} + 1 = 4$$

$$A = (0, -2), \quad B = (4, 4), \quad C = (-4, 4)$$

$$BC = 8$$

$$AB = \sqrt{(4-0)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{16+36} = 2\sqrt{13}$$

$$AC = 2\sqrt{13}$$

$$P = 8 + 2\sqrt{13} + 2\sqrt{13} = 8 + 4\sqrt{13}$$

الجواب النهائي
محيط المثلث

$$P = 8 + 4\sqrt{13}$$