

حلول امتحان البجروت 35471

شتاء 2023 · ترجمة تعليمية غير رسمية · النسخة أ

حلول عربية مفصّلة، مع فصل الجواب النهائي عن خطوات الحساب.

حلول تعليمية أصلية وليست حلولاً رسمية للوزارة.

حقوق النشر والطباعة | mathbagrut.com

© 2026 mathbagrut.com — حقوق الشرح والحلول والتصميم محفوظة. الطباعة التعليمية الشخصية أو الصفية مسموحة مع إبقاء

اسم الموقع. إعادة النشر أو البيع تحتاج إذناً خطياً.

نص السؤال ترجمة تعليمية غير رسمية عن الامتحان العبري؛ حقوق النص الأصلي للوزارة، وعند الاختلاف يُعتمد النص العبري الرسمي.

السؤال 1 • المتتالية الهندسية لمسافات الجري

أجبت عن أكثر من خمسة أسئلة، تُفحص الإجابات الخمس الأولى فقط.

1. الفصل الأول - متتاليات، إحصاء، احتمال

يجري يوسي في مسار معين. في الدقيقة الأولى يقطع 75 متراً. في كل دقيقة، بدءاً من الدقيقة الثانية، يقطع مسافة أكبر 1.02 مرة من المسافة التي قطعها في الدقيقة السابقة.

دققوا في إجاباتكم حتى منزلتين بعد الفاصلة العشرية.

أ. (1) ما هي المسافة التي قطعها يوسي خلال الدقيقة الرابعة؟

(2) ما هي المسافة الكلية التي قطعها خلال الدقائق الأربع الأولى؟

ب. اكتبوا صيغة لحساب المسافة الكلية التي يقطعها يوسي خلال الدقائق n الأولى.

ج. يريد يوسي قطع 2,500 متر بالمجموع، لكن لديه 25 دقيقة فقط. فسروا لماذا لن ينجح في قطع 2,500 متر خلال 25 دقيقة.

د. يجري داني في المسار نفسه، ويقطع في الدقيقة الأولى مسافة معينة. هو أيضاً، بدءاً من الدقيقة الثانية، يقطع في كل دقيقة مسافة أكبر 1.02 مرة من المسافة السابقة. احسبوا أقصر مسافة عليه قطعها في الدقيقة الأولى لكي يقطع 2,500 متر خلال 25 دقيقة.

أ(1) • المسافة في الدقيقة الرابعة

المسافة في الدقيقة الأولى 75 متراً، والنسبة الثابتة 1.02.

$$a_1 = 75, \quad q = 1.02$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$a_4 = 75(1.02)^3$$

$$(1.02)^3 = 1.061208$$

$$a_4 = 79.5906$$

الجواب النهائي
مسافة الدقيقة الرابعة

$$a_4 \approx 79.59 \text{ m}$$

أ(2) • مجموع أربع دقائق

لأن النسبة الهندسية ليست 1 نستعمل دستور مجموع أربعة حدود.

$$S_4 = 75 \frac{1.02^4 - 1}{1.02 - 1}$$

$$1.02^4 = 1.08243216$$

$$S_4 = 75 \frac{0.08243216}{0.02}$$

$$S_4 = 75(4.121608) = 309.1206$$

الجواب النهائي
المسافة الكلية في أربع دقائق

$$S_4 \approx 309.12 \text{ m}$$

ب . صيغة المجموع العام

نطبق الدستور نفسه لأي عدد طبيعي موجب n .

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$a_1 = 75, \quad q = 1.02$$

$$S_n = 75 \frac{1.02^n - 1}{0.02}$$

$$S_n = 3750(1.02^n - 1)$$

الجواب النهائي
صيغة مجموع مسافات n دقيقة

$$S_n = 3750(1.02^n - 1)$$

ج . هل يصل إلى 2500 متر؟

كل مسافة في الدقيقة التالية موجبة؛ لذلك إذا لم يبلغ الهدف بعد 25 دقيقة، فلن يبلغه في الزمن المتاح.

$$S_{25} = 3750(1.02^{25} - 1)$$

$$1.02^{25} \approx 1.640606$$

$$S_{25} \approx 3750(0.640606) = 2402.27$$

$$2402.27 < 2500$$

الجواب النهائي
لن يتمكن يوسي من قطع 2500 متر

$$S_{25} \approx 2402.27 < 2500$$

د . أقل مسافة أولى لداني

لهما النسبة نفسها؛ لبلوغ 2500 متر خلال 25 دقيقة يجب أن يكون مجموع داني 2500 على الأقل.

$$S_{25} = a \frac{1.02^{25} - 1}{0.02}$$

$$a \frac{1.02^{25} - 1}{0.02} \geq 2500$$

$$a \geq \frac{2500(0.02)}{1.02^{25} - 1}$$

$$a \geq \frac{50}{0.640606} \approx 78.0511$$

$$a \geq 78.06$$

الجواب النهائي

أقل مسافة أولى؛ 78.06 متر عند التقريب إلى سنتيمترات

$$a_{\min} = \frac{50}{1.02^{25} - 1} \approx 78.0511 \text{ m}$$

السؤال 2 • التوزيع الطبيعي لوزن الكرز

2. في بستان كرز كبير لخصوا كم كغم من الكرز تنتج كل شجرة في سنة عادية. متوسط وزن الكرز الذي تنتجه الشجرة 40 كغم. يتوزع وزن الكرز الذي تنتجه الأشجار توزيعاً طبيعياً.
- أ. ما هو وسيط وزن الكرز الذي تنتجه الشجرة في البستان؟
- ب. معطى: النسبة المئوية للأشجار التي تنتج أقل من 30 كغم من الكرز في السنة هي 18.1%.
- ج. ما هو الانحراف المعياري؟ دققوا حتى منزلتين بعد الفاصلة العشرية.
- د. في البستان 300 شجرة كرز. للأشجار التي تنتج أكثر من 55 كغم من الكرز تُجرى جولة قطف إضافية.
- هـ. لكم شجرة في البستان، تقريباً، تُجرى جولة قطف إضافية؟
- د. في سنة معينة انخفض متوسط وزن الكرز الذي تنتجه الأشجار بنسبة 20% مقارنةً بسنة عادية، ولم يتغير الانحراف

أ • الوسيط

التوزيع الطبيعي متماثل حول المعدل؛ لذلك الوسيط يساوي المعدل.

$$\mu = 40$$

$$P(X < 40) = P(X > 40) = 0.5$$

الجواب النهائي
وسيط وزن الكرز

$$\text{Med}(X) = 40 \text{ kg}$$

ب • الانحراف المعياري

من الجدول 0.181 يقابل $z \approx -0.91$ ، ثم نزل الانحراف المعياري.

$$P(X < 30) = 0.181 \implies z \approx -0.91$$

$$-0.91 = \frac{30 - 40}{\sigma} = \frac{-10}{\sigma}$$

$$0.91\sigma = 10$$

$$\sigma = \frac{10}{0.91} \approx 10.9890$$

الجواب النهائي
الانحراف المعياري

$$\sigma \approx 10.99 \text{ kg}$$

ج • الأشجار ذات الجولة الإضافية

نقرأ من جدول الطبيعي بعد تقريب العلامة المعيارية إلى منزلتين.

$$z = \frac{55 - 40}{10.9890} = \frac{15}{10.9890} \approx 1.37$$

$$P(X > 55) = 1 - P(Z < 1.37)$$

$$P(Z < 1.37) \approx 0.9147$$

$$P(X > 55) \approx 0.0853$$

$$N \approx 300(0.0853) = 25.59$$

الجواب النهائي
عدد الأشجار التقريبي في السنة العادية

$$N \approx 26$$

د. بعد انخفاض المعدل

المعدل الجديد 80% من 40، والانحراف المعياري ثابت.

$$\mu_{\text{new}} = 40(1 - 0.20) = 32$$

$$z = \frac{55 - 32}{10.9890} = \frac{23}{10.9890} \approx 2.09$$

$$P(X > 55) = 1 - P(Z < 2.09) \approx 1 - 0.9817 = 0.0183$$

$$N \approx 300(0.0183) = 5.49$$

الجواب النهائي
عدد الأشجار التقريبي حسب تقريب الجدول

$$N \approx 5$$

السؤال 3 • السحب دون إعادة من صندوق القطع النقدية

المعياري. كم شجرة تقريبا انتجت أكثر من 55 كغم من الكرز في هذه السنة؟

3. في صندوق 36 قطعة نقدية: 18 قطعة من فئة شيكلين، و 12 قطعة من فئة خمسة شواكل، و 6 قطع من فئة عشرة شواكل.
أخرجوا عشوائياً قطعتين نقديتين دون إعادة.
أ. ما هو احتمال أن تكون القطعتان متطابقتين؟
ب. معلوم أن القطعتين اللتين أخرجنا متطابقتان. ما هو احتمال أن يكون مجموع قيمتهما أكبر من 5 شواكل؟
أعادوا جميع القطع إلى الصندوق وأضافوا x قطعة من فئة عشرة شواكل.
معطى: بعد الإضافة، احتمال إخراج قطعتين عشوائياً من فئة خمسة شواكل دون إعادة هو $\frac{1}{15}$.
ج. جدوا x .
د. هل ازداد احتمال إخراج قطعتين متطابقتين عشوائياً دون إعادة بعد الإضافة، أم نقص، أم بقي دون تغيير؟
عللوا.

أ • احتمال قطعتين متطابقتين

السحب بلا إعادة؛ ينقص عدد قطع الفئة المسحوبة واحدة، ويصبح مجموع الصندوق 35.

القطعتان احتمال الأولى احتمال الثانية بعد السحب احتمال المسار

$$(17/35) \cdot (18/36) \quad 17/35 \quad 18/36 \quad 2 \text{ ثم } 2$$

$$(11/35) \cdot (12/36) \quad 11/35 \quad 12/36 \quad 5 \text{ ثم } 5$$

$$(5/35) \cdot (6/36) \quad 5/35 \quad 6/36 \quad 10 \text{ ثم } 10$$

$$P(2, 2) = \frac{18}{36} \cdot \frac{17}{35} = \frac{306}{1260}$$

$$P(5, 5) = \frac{12}{36} \cdot \frac{11}{35} = \frac{132}{1260}$$

$$P(10, 10) = \frac{6}{36} \cdot \frac{5}{35} = \frac{30}{1260}$$

$$P(\text{same}) = \frac{306 + 132 + 30}{1260} = \frac{468}{1260} = \frac{13}{35}$$

الجواب النهائي
احتمال التطابق

$$P(\text{same}) = \frac{13}{35}$$

ب . مجموعهما أكثر من خمسة بشرط التطابق

ضمن حدث التطابق، مجموع 5+5 أو 10+10 أكبر من 5، أمّا 2+2 فلا.

$$\binom{18}{2} = 153, \quad \binom{12}{2} = 66, \quad \binom{6}{2} = 15$$

$$N_{\text{same}} = 153 + 66 + 15 = 234$$

$$N_{\text{desired}} = 66 + 15 = 81$$

$$P(\text{desired} \mid \text{same}) = \frac{81}{234} = \frac{9}{26}$$

الجواب النهائي
الاحتمال المشروط

$$P = \frac{9}{26}$$

ج . عدد القطع المضافة

احتمال القطعتين من فئة خمسة هو حاصل ضرب احتمالي السحب مع تغيير المقام في المرة الثانية.

$$\frac{12}{36+x} \cdot \frac{11}{35+x} = \frac{1}{15}$$

$$\frac{132}{(36+x)(35+x)} = \frac{1}{15}$$

$$(36+x)(35+x) = 1980$$

$$x^2 + 71x + 1260 = 1980$$

$$x^2 + 71x - 720 = (x-9)(x+80) = 0$$

$$x = 9 \quad (x = -80)$$

الجواب النهائي
عدد قطع العشرة المضافة

$$x = 9$$

د. التغير في احتمال التطابق

أصبح عدد قطع العشرة 15، ومجموع الصندوق 45. نحسب عدد الأزواج غير المرتبة المتطابقة.

$$N_{\text{same,new}} = \binom{18}{2} + \binom{12}{2} + \binom{15}{2}$$

$$N_{\text{same,new}} = 153 + 66 + 105 = 324$$

$$N_{\text{all,new}} = \binom{45}{2} = 990$$

$$P_{\text{new}} = \frac{324}{990} = \frac{18}{55} \approx 0.3273$$

$$P_{\text{old}} = \frac{13}{35} \approx 0.3714$$

$$0.3273 < 0.3714$$

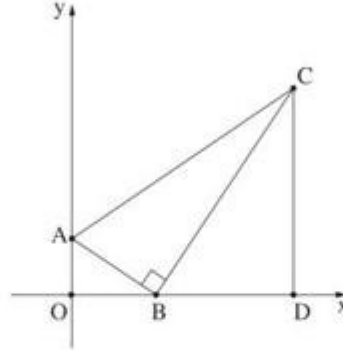
الجواب النهائي
الاحتمال نقص بعد الإضافة

$$P_{\text{new}} = \frac{18}{55} < \frac{13}{35}$$

السؤال 4 . المثلث القائم في المستوى الإحداثي

4. الفصل الثاني - هندسة

في المثلث القائم الزاوية ABC ، $\angle ABC = 90^\circ$ ، يقع الرأس B على محور x والرأس A على محور y . مرّروا من الرأس C عموداً على محور x ، يقطعه في النقطة D (انظروا الرسم). النقطة O هي مبدأ المحاور.



أ. أثبتوا أن $\triangle AOB \sim \triangle BDC$.

معطى: $\frac{CD}{OB} = \frac{5}{2}$ ، ومعادلة الضلع AB هي $y = -\frac{2}{3}x + 4$.

ب. (1) جدوا طولَي القطعتين OB و CD .

(2) جدوا إحداثيات النقطتين C و D .

ج. (1) جدوا قياس الزاوية BAC .

(2) جدوا قياس الزاوية ACD .

د. هل يمكن حصر الشكل الرباعي $ABDC$ في دائرة؟ علّلوا.

أ . إثبات التشابه

AO عمودي على OB ، و BD عمودي على DC . لأن AB عمودي على BC فإن الزاوية بين AO و AB تساوي الزاوية بين BD و BC .

$$\angle AOB = \angle BDC = 90^\circ$$

$$\angle ABO = \angle BCD$$

$$\triangle AOB \sim \triangle BDC$$

الجواب النهائي
المطلوب إثباته

$$\triangle AOB \sim \triangle BDC$$

ب(1) . طول OB و CD

B نقطة تقاطع AB مع محور x ، و O الأصل.

$$AB: y = -\frac{2}{3}x + 4$$

$$y_B = 0 \implies 0 = -\frac{2}{3}x_B + 4$$

$$\frac{2}{3}x_B = 4 \implies x_B = 6$$

$$OB = 6$$

$$\frac{CD}{OB} = \frac{5}{2} \implies CD = \frac{5}{2} \cdot 6 = 15$$

الجواب النهائي
طول القطعتين

$$OB = 6, \quad CD = 15$$

ب(2) · إحداثيات C و D

AO=4 لأن A تقاطع AB مع محور y. من ترتيب التشابه AO↔BD و OB↔DC.

$$A = (0, 4), \quad B = (6, 0), \quad AO = 4$$

$$\frac{AO}{BD} = \frac{OB}{CD} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{4}{BD} = \frac{2}{5} \implies BD = 10$$

$$x_D = 6 + 10 = 16, \quad y_D = 0$$

$$D = (16, 0), \quad C = (16, 15)$$

الجواب النهائي
إحداثيات C و D

$$D = (16, 0), \quad C = (16, 15)$$

ج(1) · قياس BAC

AB يصنع زاوية $\arctan(2/3)$ تحت الأفقي، و AC يصنع زاوية $\arctan(11/16)$ فوقه.

$$m_{AB} = -\frac{2}{3}$$

$$m_{AC} = \frac{15-4}{16-0} = \frac{11}{16}$$

$$\angle BAC = \arctan \frac{2}{3} + \arctan \frac{11}{16}$$

$$\angle BAC \approx 33.690^\circ + 34.509^\circ = 68.199^\circ$$

الجواب النهائي
الزاوية عند A

$$\angle BAC \approx 68.20^\circ$$

ج(2) · قياس ACD

عند C المستقيم CD عمودي، والمستقيم CA يميل مسافة أفقية 16 ورأسية 11.

$$|x_C - x_A| = 16, \quad |y_C - y_A| = 11$$

$$\tan \angle ACD = \frac{16}{11}$$

$$\angle ACD = \arctan \frac{16}{11} \approx 55.491^\circ$$

الجواب النهائي
الزاوية عند C

$$\angle ACD \approx 55.49^\circ$$

د. هل ABDC رباعي دائري؟

الزاويتان عند B و C متقابلتان في الرباعي A-B-D-C، ولا يبلغ مجموعهما 180° .

$$\angle ABD = 180^\circ - \arctan \frac{2}{3} \approx 146.310^\circ$$

$$\angle ACD \approx 55.491^\circ$$

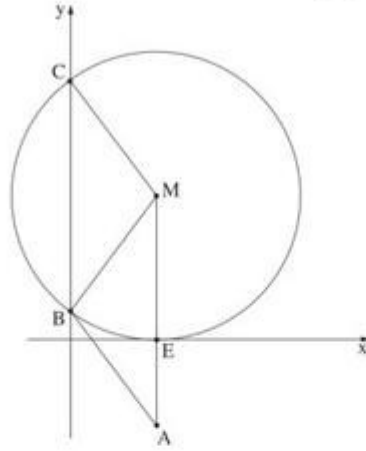
$$\angle ABD + \angle ACD \approx 201.801^\circ \neq 180^\circ$$

الجواب النهائي
لا يمكن حصر الرباعي في دائرة

$$201.801^\circ \neq 180^\circ$$

السؤال 5 • الدائرة وموازي الأضلاع

5. دائرة مركزها M تمس محور x في النقطة E . تقطع الدائرة محور y في النقطتين B و C ، كما في الرسم. النقطة A تقع على امتداد ME ، كما في الرسم.



- أ. (1) فسروا لماذا MA موازي لمحور y .
 (2) أثبتوا أن $\angle CBM = \angle BMA$.
 معطى: طول القطعة AB مساو لنصف قطر الدائرة.

- ب. (1) أثبتوا أن $\angle CMB = \angle MBA$.
 (2) أثبتوا أن الشكل الرباعي $ABCM$ متوازي أضلاع.
 معطى: $M(3, 5)$.
 جـ (1) جدوا معادلة الدائرة.
 (2) جدوا إحداثيات النقطتين B و C .
 (3) جدوا إحداثيات النقطة A .
 د. احسبوا مساحة متوازي الأضلاع $ABCM$.

أ(1) • اتجاه MA

نصف القطر ME عمودي على محور x . والنقطة A على امتداد ME ، لذا MA على المستقيم العمودي نفسه.

$$\begin{aligned} ME &\perp x \\ x_A &= x_M = x_E \\ MA &\parallel y \end{aligned}$$

الجواب النهائي
المطلوب إثباته

$$MA \parallel y$$

أ(2) • إثبات تساوي الزاويتين

من $AB=MB$ يكون المثلث ABM متساوي الساقين، والزاويتان عند A و M متساويتين. وبما أن AM موازي لمحور y الذي يحوي BC ،

تساوي الزوايا المطلوبة.

$$\begin{aligned}AB &= MB = r \\ \angle BAM &= \angle BMA \\ AM &\parallel BC \\ \angle CBM &= \angle BMA\end{aligned}$$

الجواب النهائي
المطلوب إثباته

$$\angle CBM = \angle BMA$$

ب(1) • إثبات $\angle CMB = \angle MBA$

في المثلث CMB لدينا $CM = BM$ لأنهما نصف قطر، وفي المثلث ABM لدينا $AB = BM$. زاويتي القاعدة اللتان تساويتا في البند السابق تجعلان زاويتي الرأس المتبقيتين متساويتين.

$$\begin{aligned}CM &= BM \implies \angle CMB = 180^\circ - 2\angle CBM \\ AB &= BM \implies \angle MBA = 180^\circ - 2\angle BMA \\ \angle CBM &= \angle BMA \implies \angle CMB = \angle MBA\end{aligned}$$

الجواب النهائي
المطلوب إثباته

$$\angle CMB = \angle MBA$$

ب(2) • إثبات متوازي الأضلاع

A و M على مستقيم رأسي وكذلك B و C . المساواة في البند السابق تعطي AB موازياً CM .

$$\begin{aligned}AM &\parallel BC \\ \angle CMB &= \angle MBA \implies CM \parallel AB \\ AM &\parallel BC, \quad CM \parallel AB\end{aligned}$$

الجواب النهائي
المطلوب إثباته

$$ABCM \text{ ع الزاوية } M$$

ج(1) • معادلة الدائرة

المسافة الرأسية من $M = (3, 5)$ إلى محور x هي 5.

$$\begin{aligned}M &= (3, 5) \\ r &= 5 \\ (x - 3)^2 + (y - 5)^2 &= r^2\end{aligned}$$

الجواب النهائي
معادلة الدائرة

$$(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 25$$

ج(2) · إحداثيات B و C

تقاطع الدائرة مع محور y يعطي حلين للمعادلة التربيعية.

$$(0 - 3)^2 + (y - 5)^2 = 25$$

$$9 + (y - 5)^2 = 25$$

$$(y - 5)^2 = 16$$

$$y - 5 = \pm 4$$

$$y = 1 \quad y = 9$$

الجواب النهائي
نقطتا تقاطع محور y

$$B = (0, 1), \quad C = (0, 9)$$

ج(3) · إحداثيات A

AB يساوي نصف القطر 5، وفرق إحداثي x بين A و B يساوي 3.

$$A = (3, y_A), \quad B = (0, 1)$$

$$AB = 5$$

$$(3 - 0)^2 + (y_A - 1)^2 = 5^2$$

$$(y_A - 1)^2 = 16$$

$$y_A - 1 = \pm 4 \Rightarrow y_A = 5 \quad \text{أو} \quad y_A = -3$$

$$y_A = -3$$

الجواب النهائي
إحداثيات A

$$A = (3, -3)$$

د . مساحة متوازي الأضلاع

من $B=(0,1)$ و $C=(0,9)$ نحصل على $BC=8$ ، والبعد الأفقي إلى A هو 3.

$$BC = 9 - 1 = 8$$

$$h = |x_A - x_B| = |3 - 0| = 3$$

$$S_{ABCM} = BC \cdot h = 8 \cdot 3 = 24$$

الجواب النهائي
المساحة

$$S_{ABCM} = 24$$

السؤال 6 • بحث الدالة النسبية ومشتقة الإزاحة

6. الفصل الثالث - التفاضل والتكامل لكثيرات الحدود وللدوال النسبية ولدوال الجذر

$$f(x) = \frac{5x}{x^2 + 4} + 1$$

أ. (1) جدوا مجال تعريف الدالة $f(x)$.

(2) جدوا معادلات خطوط التقارب العمودية على المحاور للدالة $f(x)$ ، إن وجدت.

ب. جدوا إحداثيات نقاط تقاطع الرسم البياني للدالة $f(x)$ مع المحاور.

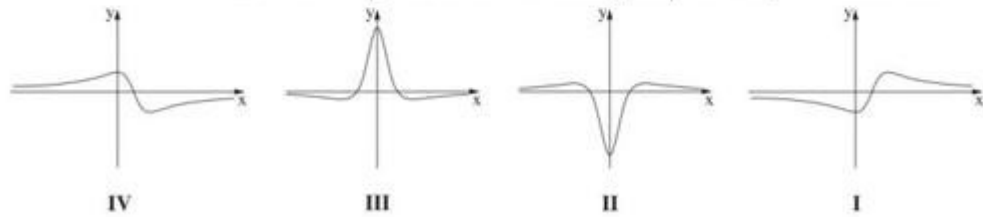
ج. جدوا إحداثيات نقاط تطرف الدالة $f(x)$ ، وحددوا نوعها.

د. ارسموا رسماً تقريبياً للرسم البياني للدالة $f(x)$.

معطى الدالة $g(x) = 2 \cdot f(x)$.

هـ. أحد الرسوم I-IV في نهاية السؤال يصف دالة المشتقة $g'(x)$. حدّوه وعلّوا تحديدكم.

و. جدوا المساحة المحصورة بين الرسم البياني لدالة المشتقة $g'(x)$ والمستقيم $x = 1$ والمحاور.



أ(1) • المجال

$x^2 + 4$ موجب لكل عدد حقيقي.

$$x^2 \geq 0$$

$$x^2 + 4 \geq 4 > 0$$

الجواب النهائي
مجال التعريف

$$D_f = \mathbb{R}$$

أ(2) • خطوط التقارب

لا ينعدم المقام؛ والكسر يميل إلى الصفر عند طرفي المجال.

$$x^2 + 4 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5x}{x^2 + 4} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$$

الجواب النهائي

تقارب أفقي، ولا يوجد تقارب عمودي

$$y = 1$$

ب . نقاط التقاطع مع المحورين

نضرب بالمقام الموجب ونحلل البسط الناتج.

$$0 = \frac{5x}{x^2 + 4} + 1$$

$$0 = 5x + x^2 + 4$$

$$x^2 + 5x + 4 = (x + 1)(x + 4) = 0$$

$$x = -1 \quad x = -4$$

$$f(0) = 1$$

الجواب النهائي
نقاط التقاطع

$$(-4, 0), (-1, 0), (0, 1)$$

ج . النقاط القصوى

المقام موجب؛ إشارة المشتقة هي إشارة $x^2 - 4$.

$$f'(x) = \frac{5(x^2 + 4) - 5x(2x)}{(x^2 + 4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{20 - 5x^2}{(x^2 + 4)^2} = \frac{5(4 - x^2)}{(x^2 + 4)^2}$$

$$4 - x^2 = 0 \implies x = -2, 2$$

$$f' < 0 \ (x < -2), \quad f' > 0 \ (-2 < x < 2), \quad f' < 0 \ (x > 2)$$

$$f(-2) = 1 - \frac{10}{8} = -\frac{1}{4}$$

$$f(2) = 1 + \frac{10}{8} = \frac{9}{4}$$

الجواب النهائي
صغرى ثم عظمى، بالترتيب

$$(-2, -\frac{1}{4}), \quad (2, \frac{9}{4})$$

د . الرسم التقريبي

الرسم يتناقص حتى -2 ، يتصاعد حتى 2 ، ثم يتناقص ويقترب من $y=1$.

$$(-4, 0), (-2, -\frac{1}{4}), (-1, 0), (0, 1), (2, \frac{9}{4})$$

$$\searrow (-\infty, -2), \quad \nearrow (-2, 2), \quad \searrow (2, \infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$$

الجواب النهائي
بيانات الرسم

$$f(-2) = -\frac{1}{4}, \quad f(2) = \frac{9}{4}$$

هـ . رسم مشتقة g

المشتقة موجبة بين -2 و 2 وسالبة خارجهما، وهي متناظرة حول محور y، وتبلغ قيمة موجبة عند الصفر.

$$g'(x) = 2f'(x) = \frac{10(4-x^2)}{(x^2+4)^2}$$

$$g'(-2) = g'(2) = 0$$

$$g'(0) = \frac{40}{16} = \frac{5}{2}$$

$$g'(x) < 0 \ (|x| > 2), \quad g'(x) > 0 \ (|x| < 2)$$

الجواب النهائي
الرسم الملائم

III

و . المساحة تحت g' إلى x=1

نستعمل g دالة أصلية لمشتقتها، ثم نعوض الطرفين.

$$S = \int_0^1 g'(x) dx = g(1) - g(0)$$

$$f(1) = \frac{5}{1+4} + 1 = 2, \quad f(0) = 1$$

$$g(1) = 2f(1) = 4, \quad g(0) = 2f(0) = 2$$

$$S = 4 - 2 = 2$$

الجواب النهائي
المساحة

$$S = 2$$

السؤال 7 • بحث الدالة الجذرية والإزاحة الرأسية

7. معطى الدالة $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{4x + 20}$.
- جدوا مجال تعريف الدالة $f(x)$.
 - جدوا إحداثيات نقاط تقاطع الرسم البياني للدالة $f(x)$ مع المحاور.
 - جدوا إحداثيات جميع نقاط تطرف الدالة $f(x)$ ، وحددوا نوعها.
 - ارسموا رسماً تقريبياً للرسم البياني للدالة $f(x)$.
 - معطى الدالة $g(x) = f(x) + c$ ، حيث c بارامتر، المستقيم $y = 12$ يمس الرسم البياني للدالة $g(x)$.
 - جدوا c (اذكروا الإمكانيتين).
8. الدالة $f(x)$ ودالة مشتقتها $f'(x)$ معرفتان لكلاً x . أمامكم الرسم البياني لدالة المشتقة.

أ • المجال

العامل x^2 لا يقيّد المجال.

$$\begin{aligned}4x + 20 &\geq 0 \\4x &\geq -20 \\x &\geq -5\end{aligned}$$

الجواب النهائي
مجال التعريف

$$D_f = [-5, \infty)$$

ب • نقاط التقاطع

الصفيران -5 و 0 ينتميان إلى المجال.

$$\begin{aligned}x^2\sqrt{4x + 20} &= 0 \\x^2 = 0 &\Rightarrow x = 0 \\4x + 20 = 0 &\Rightarrow x = -5 \\f(0) &= 0\end{aligned}$$

الجواب النهائي
نقاط التقاطع

$$(-5, 0), (0, 0)$$

ج • جميع النقاط القصوى

المقام موجب عندما $x > -5$ ؛ إشارة المشتقة تتحدد من $x(x+4)$.

$$f'(x) = 2x\sqrt{4x + 20} + x^2 \frac{4}{2\sqrt{4x + 20}}$$

$$f'(x) = \frac{2x(4x+20) + 2x^2}{\sqrt{4x+20}}$$

$$f'(x) = \frac{10x^2 + 40x}{\sqrt{4x+20}} = \frac{10x(x+4)}{\sqrt{4x+20}}$$

$$f' > 0 \quad (-5 < x < -4), \quad f' < 0 \quad (-4 < x < 0), \quad f' > 0 \quad (x > 0)$$

$$f(-5) = 0, \quad f(-4) = 16\sqrt{4} = 32, \quad f(0) = 0$$

الجواب النهائي

صغرى طرفية، عظمى، صغرى، بالترتيب

$(-5, 0), (-4, 32), (0, 0)$

د. الرسم التقريبي

الدالة غير سالبة في مجالها، وتصعد من الطرف، تنزل إلى الأصل، ثم تصعد إلى ما لا نهاية.

$$(-5, 0), \quad (-4, 32), \quad (0, 0)$$

$$\nearrow (-5, -4), \quad \searrow (-4, 0), \quad \nearrow (0, \infty)$$

$$f(x) \geq 0 \quad (x \geq -5)$$

الجواب النهائي

بيانات الرسم

$$f(-4) = 32, \quad f(0) = 0$$

هـ. قيمتا c للتماس

الإزاحة الرأسية لا تغيّر الإحداثيين x للنقطتين الساكنتين. عند العظمى $x = -4$ أو الصغرى $x = 0$.

$$g(x) = f(x) + c$$

$$g(-4) = 32 + c = 12 \implies c = -20$$

$$g(0) = 0 + c = 12 \implies c = 12$$

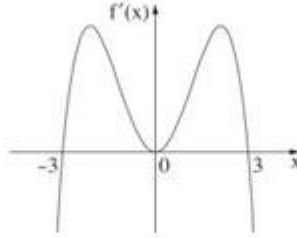
الجواب النهائي

الإمكانيتان

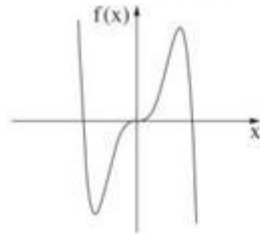
$$c = -20 \quad c = 12$$

السؤال 8 • استنتاج الدالة من رسم مشتقتها

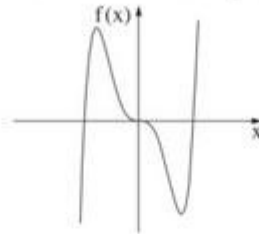
• الدالة $f(x)$ ودالة مشتقتها $f'(x)$ معروضتان لحل مسألة. أمامكم الرسم البياني لدالة $f'(x)$ معطى: تتعدم المشتقة فقط عند $x = -3$, $x = 0$, $x = 3$ ، كما في الرسم.



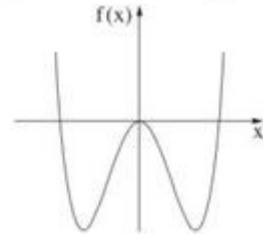
- أ. (1) جدوا مجالات تصاعد الدالة $f(x)$ وتناقصها.
 (2) ما هي الإحداثيات x لنقاط تطرف الدالة $f(x)$ ، وما هو نوعها؟ عللوا.
 ب. أحد الرسوم I–III في نهاية السؤال يصف الرسم البياني للدالة $f(x)$. حدّدوه وعلّلوا تحديدكم.
 ج. معطى أن الرسم البياني للدالة $f(x)$ يمرّ بمبدأ المحاور.
 نرمز بـ S_1 إلى المساحة المحصورة بين الرسم البياني للدالة $f(x)$ والمستقيم $x = -3$ ومحور x في المجال $-3 \leq x \leq 0$.
 نرمز بـ S_2 إلى المساحة المحصورة بين الرسم البياني للدالة $f(x)$ والمستقيم $x = 3$ ومحور x في المجال $0 \leq x \leq 3$.
 هل تتحقّق المساواة $S_1 + S_2 = \int_{-3}^3 f(x) dx$ ؟ علّلوا تحديدكم.
 د. معطى الدالة $g(x) = f(x - 4)$. ما هي الإحداثيات x لنقاط تطرف الدالة $g(x)$ ، وما هو نوعها؟ علّلوا.



III



II



I

أ(1) · مجالات الرتبة

المشتقة سالبة خارج $[-3, 3]$ وموجبة داخله، وهي صفر عند 0 من دون تبدل في الإشارة.

$$f'(x) < 0 \quad (x < -3)$$

$$f'(x) > 0 \quad (-3 < x < 0) \cup (0 < x < 3)$$

$$f'(x) < 0 \quad (x > 3)$$

الجواب النهائي
مجالات التصاعد والتنازل

$$\searrow (-\infty, -3), \nearrow (-3, 3), \searrow (3, \infty)$$

أ(2) · نقاط التطرف

عند -3 تتبدل من سالبة إلى موجبة، وعند 3 من موجبة إلى سالبة. عند الصفر لا تتبدل.

$$x = -3: \quad (-) \rightarrow (+)$$

$$x = 0: \quad (+) \rightarrow (+)$$

$$x = 3: \quad (+) \rightarrow (-)$$

الجواب النهائي
صغرى عند -3 وعظمى عند 3

$$x = -3, \quad x = 3$$

ب · اختيار رسم f

الرسم III وحده ينخفض إلى صغرى يسار الصفر، يمر بنقطة سكون عند الأصل دون تبدل رتبة، ثم يبلغ عظمى يمينه.

$$\searrow (-\infty, -3), \nearrow (-3, 3), \searrow (3, \infty)$$

$$f'(0) = 0, \quad f'(0^-) > 0, \quad f'(0^+) > 0$$

الجواب النهائي
الرسم الملائم

III

ج · المساحتان والتكامل المحدد

على $[-3, 0]$ يقع الرسم تحت محور x ، وعلى $[0, 3]$ فوقه؛ التكامل يطرح المساحة الأولى ويضيف الثانية.

$$f(x) < 0 \quad (-3 < x < 0), \quad f(x) > 0 \quad (0 < x < 3)$$

$$\int_{-3}^0 f(x) dx = -S_1$$

$$\int_0^3 f(x) dx = S_2$$

$$\int_{-3}^3 f(x) dx = -S_1 + S_2 \neq S_1 + S_2$$

الجواب النهائي
المساواة المقترحة غير صحيحة

$$\int_{-3}^3 f(x) dx = S_2 - S_1$$

د. نقاط تطرف g بعد الإزاحة

كل إحداثي x لنقطة تطرف f يزيد 4، ويبقى نوعها نفسه.

$$g'(x) = f'(x - 4)$$

$$x - 4 = -3 \implies x = 1$$

$$x - 4 = 3 \implies x = 7$$

$$x - 4 = 0 \implies x = 4$$

الجواب النهائي

صغرى عند 1 وعظمى عند 7؛ السكون عند 4 ليس تطرفاً

$$x = 1, \quad x = 7$$