

حلول امتحان البجروت 35471

صيف 2022 · الموعد ب · ترجمة تعليمية غير رسمية · النسخة أ

حلول عربية مفصّلة، مع فصل الجواب النهائي عن خطوات الحساب.

حلول تعليمية أصلية وليست حلولاً رسمية للوزارة.

حقوق النشر والطباعة | mathbagrut.com

© 2026 mathbagrut.com — حقوق الشرح والحلول والتصميم محفوظة. الطباعة التعليمية الشخصية أو الصفية مسموحة مع إبقاء

اسم الموقع. إعادة النشر أو البيع تحتاج إذناً خطياً.

نص السؤال ترجمة تعليمية غير رسمية عن الامتحان العبري؛ حقوق النص الأصلي للوزارة، وعند الاختلاف يُعتمد النص العبري الرسمي.

السؤال 1 • المتتالية الحسابية في تدريبات السباحة

1. الفصل الأول - متتاليات، إحصاء، احتمال

تدرب نوعام استعداداً لمسابقة سباحة. في كل تدريب، بدءاً من التدريب الثاني، سبح 50 متراً أكثر مما سبح في التدريب السابق.

معلوم أن المسافة التي سبحتها في التدريب الثامن أكبر بمرتين من المسافة التي سبحتها في التدريب الأول.

أ. جدوا كم متراً سبح نوعام في التدريب الأول.

ب. (1) هل يمكن أن يكون قد سبح في أحد التدريبات 830 متراً بالضبط؟ علّلوا.

(2) جدوا في أي تدريب سبح 1,000 متر بالضبط.

بعد التدريب الذي سبح فيه 1,000 متر للمرة الأولى، قرّر نوعام تغيير طريقته، وأن يسبح في كل تدريب لاحق 1,000 متر بالضبط.

معلوم أنه سبح حتى المسابقة 25,450 متراً بالمجموع في جميع التدريبات.

ج. كم تدريباً بالمجموع تدرب نوعام استعداداً للمسابقة؟

أ • مسافة التدريب الأول

مسافات التدريب متتالية حسابية فرقتها خمسون متراً. نكتب الحد الثامن بدلالة الأول ونحل المعادلة.

$$d = 50$$

$$a_8 = a_1 + 7d = a_1 + 7(50) = a_1 + 350$$

$$a_8 = 2a_1$$

$$a_1 + 350 = 2a_1$$

$$a_1 = 350$$

الجواب النهائي

المسافة في التدريب الأول

$$a_1 = 350 \text{ m}$$

ب(1) • فحص 830 متراً

نكتب الحد العام ثم نفحص إن كان 830 حداً في المتتالية.

$$a_n = 350 + 50(n - 1) = 300 + 50n$$

$$300 + 50n = 830$$

$$50n = 530$$

$$n = 10.6 \notin \mathbb{N}$$

الجواب النهائي

الجواب: لا؛ رقم التدريب ليس طبيعياً

$$n = 10.6 \notin \mathbb{N}$$

ب(2) • تدريب 1000 متر

المسافة تزداد في كل تدريب؛ لذلك يوجد على الأكثر تدريب واحد بهذه المسافة في الجزء الأول.

$$a_n = 300 + 50n$$

$$300 + 50n = 1000$$

$$50n = 700$$

$$n = 14$$

$$a_{14} = 300 + 50(14) = 1000$$

الجواب النهائي
التدريب الرابع عشر

$$n = 14$$

ج . العدد الكلي للتدريبات

بعد التدريب الرابع عشر يسبح 1000 متر في كل تدريب إضافي؛ نحسب مقدار ما بقي من المجموع.

$$S_{14} = \frac{14}{2}(a_1 + a_{14})$$

$$S_{14} = 7(350 + 1000) = 7(1350) = 9450$$

$$25450 - 9450 = 16000$$

$$N_{\text{extra}} = \frac{16000}{1000} = 16$$

$$N = 14 + 16 = 30$$

الجواب النهائي
عدد التدريبات كله

$$N = 30$$

السؤال 2 • المعدل والانحراف المعياري والوسيط لعدد السيارات

2. في البلدة أ فُحصوا عدد السيارات لكل عائلة. تبين أن هناك عائلات لا تملك سيارات، وعائلات تملك سيارة واحدة، أو سيارتين، أو ثلاث سيارات فقط.

يصف الجدول توزيع عدد السيارات للعائلة في البلدة أ.

عدد السيارات للعائلة	0	1	2	3
عدد العائلات	30	y	x	6

معلوم أن للعائلة في البلدة أ سيارة واحدة في المتوسط.

أ. جدوا x (عدد العائلات في البلدة أ التي تملك سيارتين).

معطى أن الانحراف المعياري لعدد السيارات للعائلة في البلدة أ هو $\sqrt{\frac{6}{7}}$.

ب. (1) جدوا عدد العائلات في البلدة أ.

(2) جدوا المتوسط والوسيط لعدد السيارات للعائلة في البلدة أ.

في البلدة ب أيضاً عائلات لا تملك سيارات، وعائلات تملك سيارة واحدة، أو سيارتين، أو ثلاث سيارات فقط.

عدد العائلات في البلدة ب مساو لعدد العائلات في البلدة أ. وسيط عدد السيارات للعائلة في البلدة ب هو 0.5.

ج. كم عائلة في البلدة ب لا تملك سيارات؟

أ • عدد العائلات التي لها سيارتان

نضرب طرفي معادلة المعدل في مجموع العائلات، ثم نختزل عدد العائلات ذات السيارة الواحدة.

عدد السيارات 0 1 2 3

العائلات 6 x y 30

$$\bar{x} = \frac{0(30) + 1(y) + 2x + 3(6)}{30 + y + x + 6} = 1$$

$$y + 2x + 18 = 36 + y + x$$

$$x = 18$$

الجواب النهائي
عائلة لها سيارتان

$$x = 18$$

ب(1) • العدد الكلي للعائلات

الانحراف المعياري هو جذر التباين. وبما أن المعدل يساوي واحداً، فالتباين يساوي معدل مربعات القيم ناقص واحد.

$$N = 30 + y + 18 + 6 = 54 + y$$

$$\sigma^2 = E(X^2) - \bar{x}^2 = \frac{y + 4(18) + 9(6)}{N} - 1$$

$$\frac{6}{7} = \frac{y + 126}{54 + y} - 1 = \frac{72}{N}$$

$$6N = 7(72) = 504$$

$$N = 84$$

$$y = 84 - 54 = 30$$

الجواب النهائي
عدد العائلات في البلدة أ

$$N = 84$$

ب(2) . المنوال والوسيط

تكرار الصفر والواحد متساوٍ وهو الأكبر. ولأن N زوجي، نأخذ متوسط المشاهدين في المرتبتين 42 و 43.

$$(n_0, n_1, n_2, n_3) = (30, 30, 18, 6)$$

$$\max(30, 30, 18, 6) = 30$$

$$x_{(42)} = x_{(43)} = 1$$

$$\text{Med} = \frac{1 + 1}{2} = 1$$

الجواب النهائي
المنوال والوسيط

$$\text{Mode} = \{0, 1\}, \quad \text{Med} = 1$$

ج . عدد العائلات بلا سيارة في البلدة ب

الوسيط هو متوسط القيمتين في المرتبتين 42 و 43. لكي يكون 0.5، يلزم أن تكون الأولى صفراً والثانية واحداً.

$$N = 84$$

$$\text{Med} = \frac{x_{(42)} + x_{(43)}}{2} = 0.5$$

$$x_{(42)} = 0, \quad x_{(43)} = 1$$

$$\#(X = 0) = 42$$

الجواب النهائي
عائلة لا تملك سيارة في البلدة ب

$$42$$

السؤال 3 • سحب كرتين واحتمال اللون

3. لشيرا سلة فيها x كرة بالمجموع. 12 كرة خضراء والباقي حمراء.
معطى: احتمال إخراج كرتين خضراوين بالتتابع مع الإعادة هو 0.36.
أ. جدوا x .
تُخرج شيرا كرة عشوائياً من السلة. إذا كانت حمراء، تُعيدها إلى السلة ثم تُخرج كرة ثانية عشوائياً. إذا كانت خضراء، تتركها خارج السلة ثم تُخرج كرة ثانية عشوائياً.
ب. ما هو احتمال أن تُخرج شيرا كرة خضراء واحدة على الأقل؟
ج. إذا علم أن شيرا أخرجت كرة خضراء واحدة على الأقل، فما هو احتمال أنها أخرجت كرتين بلونين مختلفين؟
لشيرا سلة إضافية فيها x كرة (القيمة التي وجدتموها في أ). في هذه السلة أيضاً 12 كرة خضراء والباقي حمراء.
تُخرج شيرا عشوائياً كرتين من هذه السلة مع الإعادة.
د. ما هو احتمال أن تكون الكرات الأربع التي أخرجتها من السلتين من اللون نفسه؟

أ • عدد الكرات

بما أن السحبتين مستقلتان عند الإعادة، نحصل على مربع احتمال الخضراء.

$$P(GG) = \frac{12}{x} \cdot \frac{12}{x} = 0.36$$

$$\left(\frac{12}{x}\right)^2 = 0.36$$

$$\frac{12}{x} = \sqrt{0.36} = 0.6$$

$$x = \frac{12}{0.6} = 20$$

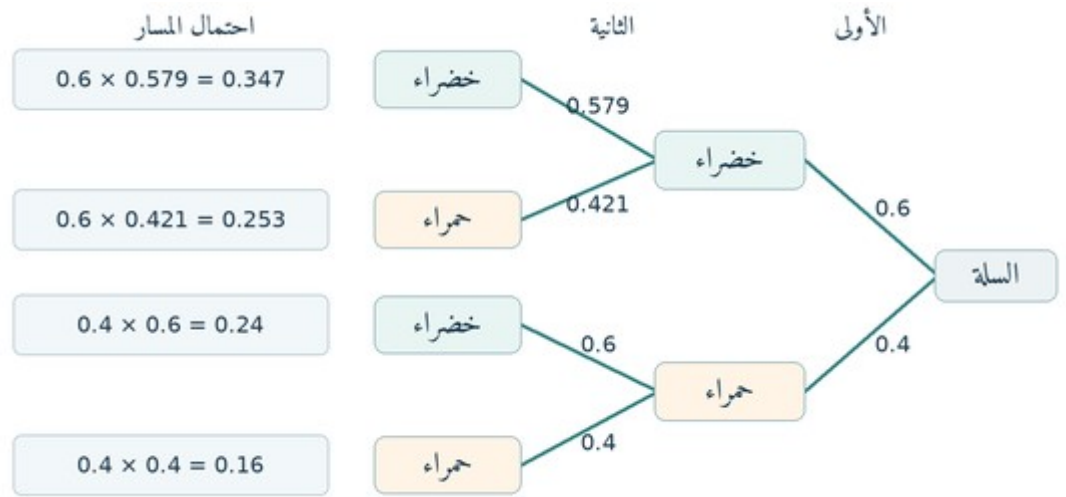
$$R = x - 12 = 8$$

الجواب النهائي
عدد الكرات الكلي

$$x = 20$$

ب • خضراء واحدة على الأقل

إذا كانت الأولى حمراء تعاد، ولذلك احتمال حمراء ثانية $8/20$. متمم وجود خضراء هو مسار الحمراء مرتين.



$$P(RR) = \frac{8}{20} \cdot \frac{8}{20} = \frac{4}{25}$$

$$P(G_{\geq 1}) = 1 - P(RR)$$

$$= 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25}$$

الجواب النهائي
احتمال خضراء واحدة على الأقل

$$P = \frac{21}{25}$$

ج . لونان مختلفان بشرط وجود خضراء

نرمز إلى الخضراء بـ G، وإلى اختلاف اللونين بـ D. المسار خضراء ثم حمراء بلا إعادة، والمسار حمراء ثم خضراء مع إعادة، مقام الاحتمال الشرطي هو جواب ب.

$$P(GR) = \frac{12}{20} \cdot \frac{8}{19} = \frac{24}{95}$$

$$P(RG) = \frac{8}{20} \cdot \frac{12}{20} = \frac{6}{25}$$

$$P(GR \cup RG) = \frac{24}{95} + \frac{6}{25} = \frac{234}{475}$$

$$P(D | G_{\geq 1}) = \frac{234/475}{21/25}$$

$$= \frac{234}{399} = \frac{78}{133}$$

الجواب النهائي
الاحتمال المشروط

$$P = \frac{78}{133}$$

د. الكرات الأربع من اللون نفسه

السلتان مستقلتان. في السلة الثانية السحب مع الإعادة؛ وفي الأولى تتحدد الإعادة بحسب لون الكرة الأولى.

$$P(GG_1) = \frac{12}{20} \cdot \frac{11}{19} = \frac{33}{95}$$

$$P(GG_2) = \left(\frac{12}{20}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

$$P(RR_1) = \left(\frac{8}{20}\right)^2 = \frac{4}{25}$$

$$P(RR_2) = \left(\frac{8}{20}\right)^2 = \frac{4}{25}$$

$$P = \frac{33}{95} \cdot \frac{9}{25} + \frac{4}{25} \cdot \frac{4}{25}$$

$$P = \frac{297}{2375} + \frac{16}{625} = \frac{1485 + 304}{11875} = \frac{1789}{11875}$$

الجواب النهائي

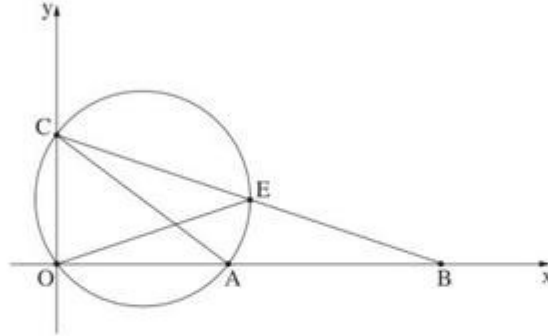
احتمال اللون الواحد للكرات الأربع

$$P = \frac{1789}{11875}$$

السؤال 4 • هندسة تحليلية: الدائرة والمثلثان

4. الفصل الثاني - هندسة

يصف الرسم دائرة تمرّ بالنقاط O, C, A . النقطة O هي مبدأ المحاور. تقطع الدائرة الجزء الموجب من محور x في النقطة A . النقطة B خارج الدائرة، على الجزء الموجب من محور x . تقطع القطعة CB الدائرة في النقطة E (انظروا الرسم). معطى: $\angle EOB = \angle EBO$.



- أ. أثبتوا أن $AC = AB$. معطى: $C(0, 3), A(4, 0)$.
- ب. جدوا إحداثيات النقطة B .
- ج. (1) أثبتوا أن AC قطر في الدائرة. (2) جدوا معادلة الدائرة.
- د. معطى أن الإحداثي x للنقطة E هو 4.5 . بكم مرة تزيد مساحة المثلث COB عن مساحة المثلث EOB ؟
- هـ. احسبوا قياس الزاوية EOB .

أ • إثبات $AC=AB$

في المثلث ABC زاوية B تساوي $\angle EBO$ ، وزاوية C تساوي $\angle ECA$. وبما أن O و A و B على استقامة واحدة، تستند زاويتا EOA و ECA إلى القوس EA .

$$\begin{aligned}\angle ABC &= \angle EBO \\ \angle EBO &= \angle EOB = \angle EOA \\ \angle EOA &= \angle ECA = \angle BCA \\ \angle ABC &= \angle BCA \implies AC = AB\end{aligned}$$

الجواب النهائي
المطلوب إثباته

$$AC = AB$$

ب • إحداثيات B

المسافة من A إلى C هي وتر مثلث قائم ساقيه 4 و 3 ؛ والنقطة B على يمين A على محور x .

$$AC = \sqrt{(4-0)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

$$AB = AC = 5$$

$$x_B = x_A + AB = 4 + 5 = 9$$

$$y_B = 0$$

الجواب النهائي
إحداثيات B

$$B = (9, 0)$$

ج(1) · إثبات أن AC قطر

OA على محور x و OC على محور y؛ لذلك زاوية AOC قائمة، وهي زاوية محيطية تقابل الوتر AC.

$$OA \perp OC \implies \angle AOC = 90^\circ$$

$$\angle AOC = \frac{1}{2} \widehat{AC}$$

$$\widehat{AC} = 180^\circ$$

$$AC = 2r$$

الجواب النهائي
القطعة AC قطر في الدائرة

$$AC = 2r$$

ج(2) · معادلة الدائرة

المركز منتصف AC، ونصف القطر نصف طول AC.

$$M = \left(\frac{4+0}{2}, \frac{0+3}{2} \right) = \left(2, \frac{3}{2} \right)$$

$$r = \frac{AC}{2} = \frac{5}{2}$$

$$(x-2)^2 + \left(y - \frac{3}{2} \right)^2 = \left(\frac{5}{2} \right)^2$$

الجواب النهائي
معادلة الدائرة

$$(x-2)^2 + \left(y - \frac{3}{2} \right)^2 = \frac{25}{4}$$

د • نسبة مساحتي COB وEOB

للمثلثين القاعدة نفسها OB؛ فتساوي نسبة المساحتين نسبة الارتفاعين. نعوض $x_E=4.5$ في معادلة الدائرة ونختار النقطة الواقعة على القطعة CB.

$$(4.5 - 2)^2 + (y_E - 1.5)^2 = 6.25$$

$$6.25 + (y_E - 1.5)^2 = 6.25$$

$$y_E = 1.5$$

$$\frac{[COB]}{[EOB]} = \frac{\frac{1}{2}(OB)(3)}{\frac{1}{2}(OB)(1.5)} = \frac{3}{1.5} = 2$$

الجواب النهائي
مرتان

$$\frac{[COB]}{[EOB]} = 2$$

هـ • قياس EOB

من O إلى E التغير الأفقي 4.5 والعمودي 1.5؛ وOB أفقي.

$$E = (4.5, 1.5)$$

$$\tan(\angle EOB) = \frac{1.5}{4.5} = \frac{1}{3}$$

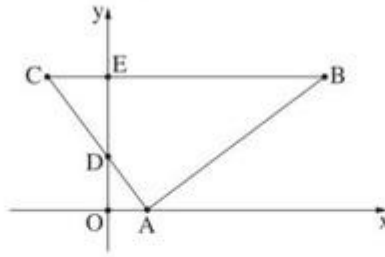
$$\angle EOB = \arctan\left(\frac{1}{3}\right) \approx 18.435^\circ$$

الجواب النهائي
قياس الزاوية

$$\angle EOB \approx 18.43^\circ$$

السؤال 5 • تشابه المثلثات ومساحة الرباعي

5. في المثلث ABC يقع الرأس A على محور x. يقطع الضلع AC محور y في النقطة D. الضلع CB موازٍ لمحور x، ويقطع محور y في النقطة E، كما في الرسم. النقطة O هي مبدأ المحاور.



أ. أثبتوا أن $\triangle CED \sim \triangle AOD$.

معطى أن معادلة المستقيم AC هي $y = -\frac{4}{3}x + 4$ ، وأن $\frac{DO}{DE} = \frac{2}{3}$.

ب. (1) جدوا طول القطعة DE.

(2) جدوا معادلة المستقيم CB.

معطى: الضلع AB عمودي على الضلع AC.

جـ. جدوا معادلة المستقيم AB.

د. احسبوا قياس الزاوية CDE.

هـ. احسبوا مساحة الشكل الرباعي ADEB.

أ • إثبات التشابه

المستقيمان CE وAO أفقيان، وDE وDO رأسيان؛ لذلك الزاويتان عند E وO قائمتان، والزاويتان عند D متقابلتان بالرأس.

$$CE \parallel AO, \quad DE \parallel DO, \quad CD \parallel AD$$

$$\angle CED = \angle AOD = 90^\circ$$

$$\angle CDE = \angle ADO$$

$$\triangle CED \sim \triangle AOD$$

الجواب النهائي
التشابه

$$\triangle CED \sim \triangle AOD$$

ب(1) • طول DE

نعوض $x=0$ لإيجاد D، ثم نطبق المعطى $DE/DO=3/2$.

$$y = -\frac{4}{3}x + 4$$

$$D = (0, 4), \quad O = (0, 0)$$

$$DO = 4$$

$$\frac{DE}{DO} = \frac{3}{2}$$

$$DE = \frac{3}{2}(4) = 6$$

الجواب النهائي
طول القطعة

$$DE = 6$$

ب(2) • معادلة CB

النقطة E تعلقو D بمقدار DE؛ إذن إحداثيها الرأسي 6+4.

$$y_E = y_D + DE = 4 + 6 = 10$$

$$E = (0, 10)$$

$$CB \parallel x\text{-axis}$$

$$y = 10$$

الجواب النهائي
معادلة المستقيم

$$CB : y = 10$$

ج • معادلة AB

ميل AC سالب أربعة أثلاث؛ إذن ميل المستقيم العمودي عليه ثلاثة أرباع. نجد A من تقاطع AC مع محور x.

$$0 = -\frac{4}{3}x_A + 4 \implies x_A = 3$$

$$A = (3, 0), \quad m_{AC} = -\frac{4}{3}$$

$$m_{AB} = -\frac{1}{m_{AC}} = \frac{3}{4}$$

$$y - 0 = \frac{3}{4}(x - 3)$$

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{9}{4}$$

الجواب النهائي
معادلة المستقيم

$$AB : y = \frac{3}{4}x - \frac{9}{4}$$

د . قياس CDE

C على CB وعلى AC، ولذلك $y_C=10$. فرق الإحداثيين من D إلى C هو 4.5 يساراً و6 صعوداً.

$$10 = -\frac{4}{3}x_C + 4$$

$$6 = -\frac{4}{3}x_C$$

$$x_C = -\frac{9}{2} = -4.5$$

$$\tan(\angle CDE) = \frac{|x_C - x_D|}{y_C - y_D} = \frac{4.5}{6} = \frac{3}{4}$$

$$\angle CDE = \arctan\left(\frac{3}{4}\right) \approx 36.87^\circ$$

الجواب النهائي
قياس الزاوية

$$\angle CDE \approx 36.87^\circ$$

هـ . مساحة ADEB

نجد B من تقاطع AB مع $y=10$ ، ثم نجمع مساحتي المثلثين ADE و AEB.

$$10 = \frac{3}{4}x_B - \frac{9}{4}$$

$$40 = 3x_B - 9$$

$$x_B = \frac{49}{3}$$

$$[ADE] = \frac{1}{2}(DE)(AO) = \frac{1}{2}(6)(3) = 9$$

$$[AEB] = \frac{1}{2}(EB)(10) = \frac{1}{2}\left(\frac{49}{3}\right)(10) = \frac{245}{3}$$

$$[ADEB] = 9 + \frac{245}{3} = \frac{27 + 245}{3} = \frac{272}{3}$$

الجواب النهائي
وحدة مساحة

$$[ADEB] = \frac{272}{3}$$

السؤال 6 • الدالة النسبية ومشتقتها

6. الفصل الثالث - التفاضل والتكامل لكثيرات الحدود والدوال النسبية ودوال الجذر

معطى الدالة $f(x) = \frac{2x - b}{x - 4} + 1$ ببارامتر b .

أ. جدوا مجال تعريف الدالة $f(x)$.

معطى أن الرسم البياني للدالة $f(x)$ يقطع محور y في النقطة $(0, 2.5)$.

ب. جدوا b .

عوضوا قيمة b التي وجدتموها في ب، وأجيبوا عن البنود ج-ز.

ج. جدوا معادلات خطوط التقارب الموازية للمحاور للدالة $f(x)$.

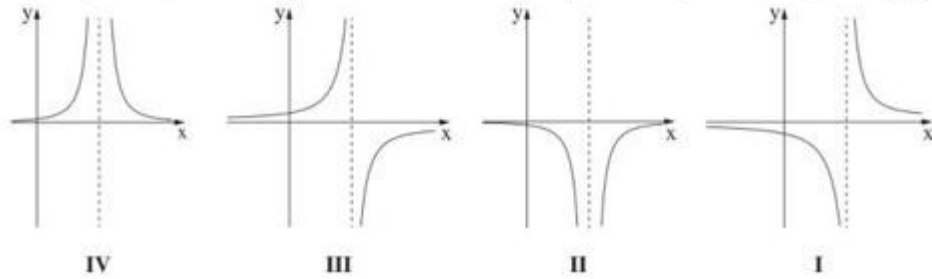
د. جدوا إحداثيات نقطة تقاطع الرسم البياني للدالة $f(x)$ مع محور x .

هـ. جدوا مجالات تصاعد الدالة $f(x)$ وتناقصها (إن وجدت).

و. ارسموا رسماً تقريظاً للرسم البياني للدالة $f(x)$.

ز. (1) أحد الرسوم I-IV في نهاية السؤال يصف دالة المشتقة $f'(x)$. حدّدوه وعلّلوا تحديدكم.

(2) احسبوا المساحة المحصورة بين الرسم البياني لدالة المشتقة $f'(x)$ والمستقيم $x = 1$ ومحور x ومحور y .



أ. مجال التعريف

لا يجوز قسمة عدد على صفر؛ لذلك نستبعد $x=4$.

$$f(x) = \frac{2x - b}{x - 4} + 1$$

$$x - 4 \neq 0$$

$$x \neq 4$$

الجواب النهائي
مجال التعريف

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$$

ب. قيمة b

إحداثي نقطة التقاطع مع المحور الرأسي هو $f(0)=2.5$.

$$f(0) = \frac{-b}{-4} + 1 = \frac{b}{4} + 1$$

$$\frac{b}{4} + 1 = 2.5$$

$$\frac{b}{4} = 1.5$$

$$b = 6$$

الجواب النهائي
البارامتر

$$b = 6$$

ج . خطوط التقارب

بعد التعويض يظهر ثابت مع كسر يقترب من صفر عند القيم البعيدة، ويكبر قرب الصفر في المقام.

$$f(x) = \frac{2x - 6}{x - 4} + 1$$

$$2x - 6 = 2(x - 4) + 2$$

$$f(x) = 3 + \frac{2}{x - 4}$$

$$x = 4$$

$$y = 3$$

الجواب النهائي
خطا التقارب

$$x = 4, \quad y = 3$$

د . تقاطع محور x

نضرب في $x - 4$ ، مع بقاء $x = 4$ مستبعداً من المجال.

$$3 + \frac{2}{x - 4} = 0$$

$$3(x - 4) + 2 = 0$$

$$3x - 12 + 2 = 0$$

$$3x = 10$$

$$x = \frac{10}{3}$$

الجواب النهائي
تقاطع محور x

$$\left(\frac{10}{3}, 0\right)$$

هـ . مجالات التناقص

مربع المقام موجب دائماً داخل المجال، والبسط سالب.

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(3 + \frac{2}{x - 4} \right) = -\frac{2}{(x - 4)^2}$$

$$(x - 4)^2 > 0 \quad (x \neq 4)$$

$$f'(x) < 0 \quad (x \neq 4)$$

الجواب النهائي
التناقض في المجالين؛ لا تصاعد

$$f \downarrow (-\infty, 4), \quad f \downarrow (4, \infty)$$

و. الرسم التقريبي

يسار 4 يكون $(x-4)/2$ سالباً، ويمينا موجباً؛ وكل فرع متناقص.

$$x < 4 \implies f(x) < 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = -\infty$$

$$x > 4 \implies f(x) > 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = +\infty$$

$$f(0) = 2.5, \quad f\left(\frac{10}{3}\right) = 0$$

الجواب النهائي
وصف الرسم التقريبي

$$x < 4 \implies f(x) < 3, \quad x > 4 \implies f(x) > 3$$

ز(1). رسم المشتقة

المشتقة سالبة على جانبي $x=4$ ، وتؤول إلى سالب ما لا نهاية عند الاقتراب منه، وإلى الصفر من الأسفل بعيداً عنه.

$$f'(x) = -\frac{2}{(x-4)^2} < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^\pm} f'(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f'(x) = 0^-$$

الجواب النهائي
الرسم II

II

ز(2) • المساحة تحت محور x للمشتقة

بين $x=0$ و $x=1$ تكون f' سالبة؛ لذا المساحة هي تكامل $-f'$.

$$A = \int_0^1 (0 - f'(x)) dx = f(0) - f(1)$$

$$f(0) = 3 + \frac{2}{-4} = \frac{5}{2}$$

$$f(1) = 3 + \frac{2}{-3} = \frac{7}{3}$$

$$A = \frac{5}{2} - \frac{7}{3} = \frac{15 - 14}{6} = \frac{1}{6}$$

الجواب النهائي
وحدة مساحة

$$A = \frac{1}{6}$$

السؤال 7 • دالة الجذر والانعكاس حول محور x

7. معطى الدالة $f(x) = (x - 3) \cdot \sqrt{2x}$.
- أ. جدوا مجال تعريف الدالة $f(x)$.
- ب. جدوا إحداثيات نقاط تقاطع الرسم البياني للدالة $f(x)$ مع المحاور.
- ج. جدوا إحداثيات جميع نقاط تطرف الدالة $f(x)$ ، وحددوا نوعها.
- د. ارسموا رسماً تقريبياً للرسم البياني للدالة $f(x)$.
- معطى الدالة $g(x) = -f(x)$.
- هـ. ارسموا رسماً تقريبياً للرسم البياني للدالة $g(x)$ في هيئة المحاور نفسها التي رسمتم فيها $f(x)$.
- ز. رمز بـ S إلى المساحة المحصورة بين الرسم البياني للدالة $f(x)$ ومحور x.
- و. عبّروا بدلالة S عن المساحة المحصورة بين الرسمين البيانيين للدالتين $f(x)$ و $g(x)$. علّلوا.

أ • مجال التعريف

الكمية تحت الجذر يجب ألا تكون سالبة.

$$\begin{aligned}f(x) &= (x - 3)\sqrt{2x} \\2x &\geq 0 \\x &\geq 0\end{aligned}$$

الجواب النهائي
مجال التعريف

$$D_f = [0, \infty)$$

ب • التقاطعات مع المحاور

حاصل الضرب صفر عندما ينعدم أحد عامليه.

$$\begin{aligned}(x - 3)\sqrt{2x} &= 0 \\\sqrt{2x} &= 0 \implies x = 0 \\x - 3 &= 0 \implies x = 3 \\f(0) &= 0\end{aligned}$$

الجواب النهائي
التقاطعات

$$(0, 0), (3, 0)$$

ج • نقاط التطرف

عند $x > 0$ نستعمل قاعدة اشتقاق الجداء؛ ثم نفحص تغير إشارة المشتقة والطرف المشمول بالمجال.

$$f'(x) = \sqrt{2x} + (x - 3)\frac{1}{\sqrt{2x}}$$

$$f'(x) = \frac{2x + x - 3}{\sqrt{2x}} = \frac{3(x-1)}{\sqrt{2x}}$$

$$0 < x < 1 \implies f' < 0 ; x > 1 \implies f' > 0$$

$$f(1) = (1-3)\sqrt{2} = -2\sqrt{2}$$

$$f(0) = 0$$

الجواب النهائي

عظمى طرفية عند الأصل؛ صغرى مطلقة عند $x=1$

$$(0, 0), (1, -2\sqrt{2})$$

د. الرسم التقريبي للدالة

ينطلق المنحنى من الأصل، ينخفض إلى صغراه، ثم يرتفع ويقطع محور x عند 3.

$$f(0) = 0$$

$$f(1) = -2\sqrt{2}$$

$$f(3) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x-3)\sqrt{2x} = +\infty$$

الجواب النهائي

وصف الرسم

$$(0, 0) \rightarrow (1, -2\sqrt{2}) \rightarrow (3, 0) \rightarrow +\infty$$

هـ. رسم $g=-f$

لكل x في المجال يكون $g(x)$ سالب قيمة $f(x)$ ، مع بقاء الأصفار نفسها.

$$g(x) = -f(x)$$

$$(x, y) \mapsto (x, -y)$$

$$(1, -2\sqrt{2}) \mapsto (1, 2\sqrt{2})$$

$$g(0) = g(3) = 0$$

الجواب النهائي

الانعكاس حول محور x

$$g(x) = -f(x)$$

٠ المساحة بين f وg

يتقاطع المنحنيان عند $x=0$ و $x=3$ ، وبينهما f سالبة و g موجبة. إذا كانت مساحة الجزء بين f والمحور هي S ، فالجزء المناظر فوقه يساوي S .

$$f(x) < 0 \quad (0 < x < 3)$$

$$g(x) = -f(x) > 0$$

$$A = \int_0^3 (g(x) - f(x)) dx$$

$$A = \int_0^3 (-2f(x)) dx = 2 \int_0^3 (-f(x)) dx$$

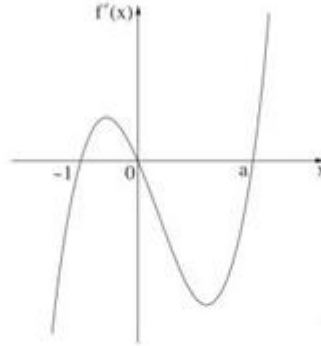
$$A = 2S$$

الجواب النهائي
المساحة المطلوبة

$$A = 2S$$

السؤال 8 • التحليل من رسم المشتقة وتكامل المساحة

8. الدالة $f(x)$ ودالة مشتقتها $f'(x)$ معرفتان لكل x .
يصف الرسم أمامكم الرسم البياني لدالة المشتقة $f'(x)$. تقطع المشتقة محور x فقط عند $x = -1$, $x = 0$, $x = a$ ، حيث $a > 0$ بارامتر.



- ما هي الإحداثيات x لنقاط تطرف الدالة $f(x)$ ، وما هو نوعها؟ عبّروا بدلالة a عند الحاجة.
معطى أن الدالة هي $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 12$.
- ب. (1) جدوا a .
(2) جدوا الإحداثيات y لنقاط تطرف الدالة $f(x)$.
- ج. يقطع الرسم البياني للدالة $f(x)$ محور x في نقطتين مختلفتين.
ارسموا رسماً تقريبياً للرسم البياني للدالة $f(x)$.
- د. احسبوا المساحة المحصورة بين الرسم البياني للدالة $f(x)$ والمستقيم المماس له في النقطة التي فيها $x = a$ والمستقيم $x = -1$.

أ • أنواع نقاط التطرف من الرسم

المشتقة سالبة قبل -1، موجبة حتى 0، سالبة حتى a ، ثم موجبة بعد a .

$$f' < 0 \quad (-\infty, -1)$$

$$f' > 0 \quad (-1, 0)$$

$$f' < 0 \quad (0, a)$$

$$f' > 0 \quad (a, \infty)$$

$$- \rightarrow +; \quad + \rightarrow -; \quad - \rightarrow +$$

الجواب النهائي

صغرى، عظمى، صغرى بالترتيب

$$x = -1, \quad x = 0, \quad x = a$$

ب(1) • قيمة a

الجذور الثلاثة للمشتقة هي القيم الظاهرة في الرسم.

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 12$$

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$$

$$f'(x) = 12x(x^2 - x - 2)$$

$$f'(x) = 12x(x+1)(x-2)$$

$$a = 2$$

الجواب النهائي
البارامتر

$$a = 2$$

ب(2) • قيم y للتطرف

نوع كل نقطة معلوم من بند أ؛ نحسب ارتفاعها بالدالة الأصلية.

$$f(-1) = 3(1) - 4(-1) - 12(1) + 12 = 3 + 4 - 12 + 12 = 7$$

$$f(0) = 12$$

$$f(2) = 3(16) - 4(8) - 12(4) + 12$$

$$f(2) = 48 - 32 - 48 + 12 = -20$$

الجواب النهائي

صغرى، عظمى، صغرى بالترتيب

$$(-1, 7), \quad (0, 12), \quad (2, -20)$$

ج • الرسم التقريبي

رأسا الدالة الرباعية يتجهان إلى أعلى؛ الصغرى الأولى موجبة والثانية سالبة، فيوجد تقاطعان فقط مع محور x.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$$

$$f(-1) = 7 > 0, \quad f(0) = 12 > 0, \quad f(2) = -20 < 0$$

$$x_{0,1} \in (0, 2), \quad x_{0,2} \in (2, \infty)$$

$$x_{\text{crit}} = -1, 0, 2$$

الجواب النهائي

وصف الرسم مع تقاطعين مع محور x

$$x_{0,1} \in (0, 2), \quad x_{0,2} \in (2, \infty)$$

د. المساحة حتى المماس الأفقي

عند $x=a=2$ توجد نقطة صغرى؛ مماسها أفقي $y=-20$. وعلى الفترة $[-1, 2]$ تقع الدالة فوق هذا المماس.

$$f'(2) = 0, \quad f(2) = -20 \implies y_{\text{tangent}} = -20$$

$$A = \int_{-1}^2 [f(x) - (-20)] dx$$

$$A = \int_{-1}^2 (3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 32) dx$$

$$F(x) = \frac{3}{5}x^5 - x^4 - 4x^3 + 32x$$

$$F(2) = \frac{176}{5}, \quad F(-1) = -\frac{148}{5}$$

$$A = F(2) - F(-1) = \frac{176 + 148}{5} = \frac{324}{5}$$

الجواب النهائي
وحدة مساحة

$$A = \frac{324}{5} = 64.8$$