

متباينة إردوش-موردل

مبرهنة واحدة، وسؤال واحد من أولمبياد الرياضيات

ماذا يمكن أن نقول عن أبعاد نقطة تقع داخل مثلث؟ لكل نقطة كهذه ثلاثيتان من الأبعاد: أبعادها عن الرؤوس الثلاثة، وأبعادها العمودية عن الأضلاع الثلاثة. تربط متباينة إردوش-موردل بينهما بعلاقة بسيطة على نحو مدهش — وهي صحيحة لكل مثلث ولكل نقطة داخله.

الأستاذ خالد خطيب

في المثلث المتساوي الأضلاع نعرف مسبقاً علاقة من هذا النوع: وفق مبرهنة فيثاغوري، مجموع أبعاد نقطة داخلية عن الأضلاع الثلاثة لا يتعلّق بموقعها إطلاقاً، فهو دائماً يساوي ارتفاع المثلث. أمّا مجموع أبعادها عن الرؤوس فيتغيّر كلّما تحركت النقطة. سأل بول إردوش: ماذا يمكن أن نقول عن النسبة بين المجموعين، في أيّ مثلث كان؟ والجواب: المجموع الأول أكبر من الثاني بمرتين على الأقل، ولا يمكن تحسين العدد 2.

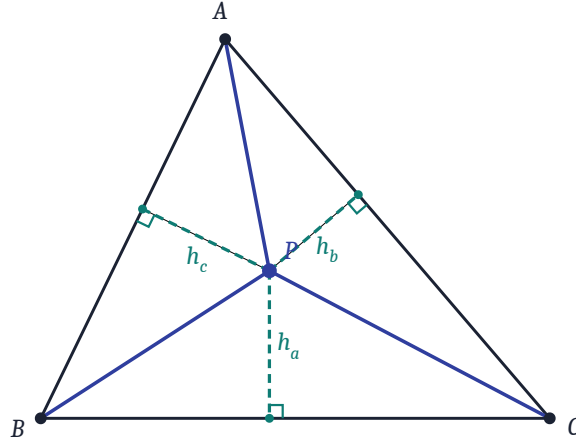
المبرهنة

متباينة إردوش-موردل

لتكن P نقطة داخل المثلث ABC ، ولنرمز بـ h_a, h_b, h_c إلى الأبعاد العمودية للنقطة P عن المستقيمات التي تقع عليها الأضلاع AB, CA, BC على الترتيب. عندئذٍ

$$PA + PB + PC \geq 2(h_a + h_b + h_c)$$

أي أنّ مجموع أبعاد P عن رؤوس المثلث أكبر بمرتين على الأقل من مجموع أبعادها العمودية عن الأضلاع.



في الرسم: **بالأزرق** — الأبعاد PA, PB, PC عن الرؤوس؛ **بالأخضر المتقطع** — الأبعاد العمودية h_a, h_b, h_c عن الأضلاع. تنص المتباينة على أن مجموع الأطوال الزرقاء أكبر بمرتين على الأقل من مجموع الأطوال الخضراء.

ملاحظة: إذا كانت إحدى زوايا المثلث منفرجة، فقد يقع موقع العمود النازل من P على امتداد ضلع لا على الضلع نفسه. في هذه الحالة نقيس البعد عن المستقيم الذي يقع عليه الضلع — وهذا بالضبط ما ورد في التعريف.

لمحة تاريخية

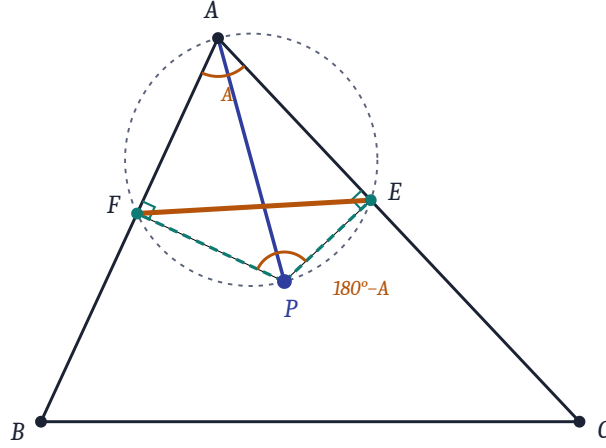
بول إردوش (1913–1996)، أحد أغزر الرياضيين إنتاجاً على مرّ العصور، نشر الادّعاء عام 1935 كمسألة برهان (المسألة رقم 3740) في المجلة الأمريكية American Mathematical Monthly. تخمّن إردوش أن الادّعاء صحيح، لكنّه لم يقدم برهاناً.

نُشر البرهان الأول عام 1937: حلّ مثلثاتي قدّمه لويس موردل (1888–1972)، الرياضي المعروف خصوصاً بأعماله في نظرية الأعداد، وديفيد بارو. بل وبرهن بارو صيغة أقوى، تُستبدل فيها الأبعاد عن الأضلاع بقطع أطول — منصّفات الزوايا $\angle APB, \angle CPA, \angle BPC$ حتى الأضلاع.

ومنذ ذلك الحين قدّمت للمبرهنة براهين كثيرة أخرى، منها براهين أولية بلا حساب مثلثات (كبرهان كازارينوف عام 1957 وبرهان بانكوف عام 1958)، بل وبراهين «بلا كلمات». لكنّ اسمي إردوش وموردل بقيا في اسمها.

برهان مثلثاتي

لنرمز بـ E و F إلى موقعي العمودين النازلين من P على المستقيمين CA و AB . إذن $PE = h_b$ و $PF = h_c$. ونرمز إلى زوايا المثلث بـ A, B, C . الفكرة: نحسب طول القطعة EF بطريقتين مختلفتين، ثم نقارن بينهما.



الدائرة التي قطرها AP تمرّ بـ E وبـ F ، لأنّ الزاويتين هناك قائمتان. **بالبرتقالي** — القطعة EF التي سنحسبها بطريقتين.

1 الدائرة الخفية

1

بما أنّ $\angle AEP = \angle AFP = 90^\circ$ ، فإنّ النقطتين E و F تريان القطعة AP بزاوية قائمة، لذا تقع A, E, P, F على دائرة قطرها AP . الوتر EF يقابل في هذه الدائرة الزاوية $\angle EAF$ ، وهي الزاوية A للمثلث (أو مكملتها إذا وقع موقع عمود على امتداد ضلع — وجيهما واحد). وفق قانون الجيوب في الدائرة التي قطرها PA :

$$EF = PA \sin A.$$

2 حساب ثانٍ لـ EF

2

في الرباعي $AFPE$ زاويتان قائمتان، لذا $\angle EPF = 180^\circ - A$. وفق قانون جيوب التمام في المثلث EPF :

$$EF^2 = h_b^2 + h_c^2 - 2h_b h_c \cos(180^\circ - A) = h_b^2 + h_c^2 + 2h_b h_c \cos A.$$

نستخدم الآن أنّ $A = 180^\circ - (B + C)$ ، أي $\cos A = \sin B \sin C - \cos B \cos C$ ، ونكتب $h_c^2 = h_c^2(\sin^2 B + \cos^2 B)$ ، $h_b^2 = h_b^2(\sin^2 C + \cos^2 C)$ بإعادة ترتيب الحدود نحصل على

$$EF^2 = (h_b \sin C + h_c \sin B)^2 + (h_b \cos C - h_c \cos B)^2.$$

لهذه الصيغة معنى هندسي: إنّها تحليل القطعة EF إلى مركبتين متعامدتين — المركبة في اتجاه الضلع BC ، والمركبة في الاتجاه العمودي عليه.

3 نتخلص من مربع

المربع الثاني غير سالب، لذا فطول القطعة لا يقل عن طول مسقطها على BC :

$$PA \sin A = EF \geq h_b \sin C + h_c \sin B.$$

وبما أن $\sin A > 0$ نحصل على

$$PA \geq \frac{\sin C}{\sin A} h_b + \frac{\sin B}{\sin A} h_c.$$

(ووفق قانون الجيوب يمكن كتابة ذلك أيضاً بالصورة $a \cdot PA \geq c h_b + b h_c$ ، حيث a, b, c أطوال الأضلاع.)

4 نجمع الرؤوس الثلاثة

بالطريقة نفسها تماماً، مع الدائرتين اللتين قطارهما PB و PC ، نحصل على متباينتين مماثلتين:

$$PB \geq \frac{\sin A}{\sin B} h_c + \frac{\sin C}{\sin B} h_a, \quad PC \geq \frac{\sin B}{\sin C} h_a + \frac{\sin A}{\sin C} h_b.$$

نجمع المتباينات الثلاث ونجمع الحدود حسب h_a, h_b, h_c :

$$PA + PB + PC \geq \left(\frac{\sin B}{\sin C} + \frac{\sin C}{\sin B} \right) h_a + \left(\frac{\sin C}{\sin A} + \frac{\sin A}{\sin C} \right) h_b + \left(\frac{\sin A}{\sin B} + \frac{\sin B}{\sin A} \right) h_c.$$

كلّ معامل على الصورة $t + \frac{1}{t}$ حيث $t > 0$ ، ولكل $t > 0$ يتحقّق

$$t + \frac{1}{t} - 2 = \frac{(t-1)^2}{t} \geq 0.$$

إذن كلّ معامل لا يقلّ عن 2، ومن هنا

$$PA + PB + PC \geq 2(h_a + h_b + h_c),$$

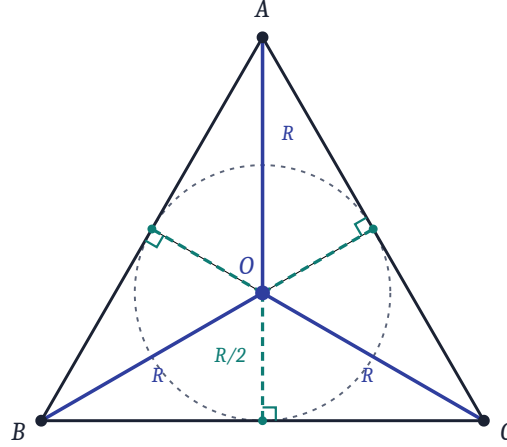
وهو المطلوب. ■

متى تتحقّق المساواة؟

تتحقّق المساواة إذا وفقط إذا كان المثلث ABC متساوي الأضلاع والنقطة P مركزه.

البرهان نفسه يبيّن السبب. كي تكون المعاملات الثلاثة مساوية لـ 2 تماماً، يجب أن يكون $t = 1$ في كلّ منها، أي $\sin A = \sin B = \sin C$. وزاويتان في مثلث جيهاهما متساويان هما متساويتان (لا يمكن أن تكونا متكاملتين، إذ لن

يبقى حينئذٍ مكان للزاوية الثالثة)، لذا فالمثلث متساوي الأضلاع. إضافة إلى ذلك، كي لا نخسر شيئاً في الخطوة 3، يجب أن نعدم المربع الذي تخلصنا منه: $h_b \cos C = h_c \cos B$. في المثلث المتساوي الأضلاع يعني ذلك $h_b = h_c$ ، وبالمثل $h_a = h_b$. والنقطة المتساوية الأبعاد عن الأضلاع الثلاثة هي مركز الدائرة الداخلية – أي مركز المثلث.



في المثلث المتساوي الأضلاع، من المركز O : كل بعد عن رأس يساوي R ، وكل بعد عن ضلع يساوي $\frac{R}{2}$. كلا طريقي المتباينة يساوي $3R$.

وبالفعل، في هذه الحالة $PA = PB = PC = R$ (نصف قطر الدائرة الخارجية)، وكل من الأبعاد عن الأضلاع هو نصف قطر الدائرة الداخلية $r = \frac{R}{2}$. لذا

$$PA + PB + PC = 3R = 2 \cdot 3 \cdot \frac{R}{2} = 2(h_a + h_b + h_c).$$

والمعنى: الثابت 2 في المبرهنة هو أفضل ثابت ممكن – لا يمكن استبداله بعدد أكبر.

نتيجة صغيرة. نجمع المبرهنة مع مبرهنة فيفياني. في مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه s ، لكل نقطة داخلية P داخله $h_a + h_b + h_c = \frac{\sqrt{3}}{2} s$. لذا لكل نقطة P داخله

$$PA + PB + PC \geq \sqrt{3} s,$$

ولا تتحقق المساواة إلا في المركز.

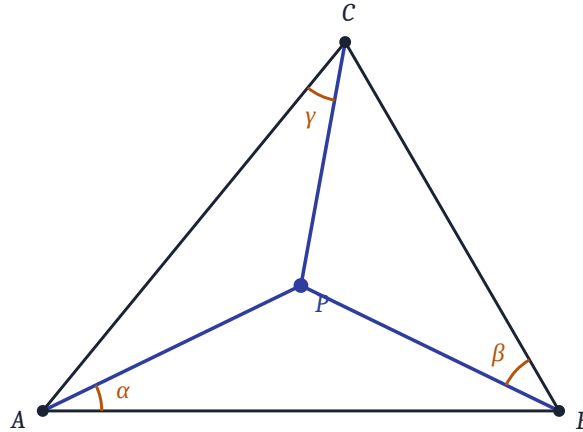
تمرين للقراء: أولمبياد الرياضيات 1991

IMO 1991، السؤال 5

معطى مثلث ABC ، والنقطة P تقع داخله. برهنوا أنّ واحدة على الأقل من الزوايا الثلاث

$$\angle PAB, \quad \angle PBC, \quad \angle PCA$$

أصغر من 30° أو تساويها.



الزوايا الثلاث مرتّبة «دورياً»: عند كلّ رأس نأخذ الزاوية بين P والضلع المتّجه إلى الرأس التالي.

كان هذا السؤال الخامس في الأولمبياد الدولي للرياضيات عام 1991 في السويد. حاولوا أن تكتشفوا كيف يمكن لمتباينة تتناول الأبعاد أن تحسم سؤالاً يتناول الزوايا.

تلميح

انظروا إلى المثلث القائم الزاوية الذي وتره PA وأحد ضلعيه القائمين هو بعد P عن الضلع AB . ماذا يقول الشرط $\angle PAB > 30^\circ$ عن هذا البعد؟ تذكّروا أنّ $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.

حلّ كامل (حاولوا وحدكم أولاً!)

نفترض جدلاً أنّ الزوايا الثلاث كلّها أكبر من 30° .

أولاً، لا يمكن لأيّ منها أن تبلغ 150° : فإذا كانت مثلاً $\angle PAB \geq 150^\circ$ ، فإنّ $A \geq 150^\circ$ ، لذا $B < 30^\circ$ وبالأخص $\angle PBC < 30^\circ$ – وهذا يناقض الفرض. وكذلك في الحالتين الآخرين (بالترتيب الدوري $(A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A)$).

إذن الزوايا الثلاث كلّها بين 30° و 150° ، وجيب كلّ منها أكبر من $\frac{1}{2}$. بعد P عن الضلع AB هو $h_c = PA \sin \angle PAB > \frac{1}{2} PA$ وبالطريقة نفسها

$$h_a = PB \sin \angle PBC > \frac{1}{2} PB, \quad h_b = PC \sin \angle PCA > \frac{1}{2} PC.$$

بالجمع نحصل على $PA + PB + PC < 2(h_a + h_b + h_c)$ – وهذا يناقض متباينة إردوش-موردل. ■

لاحظوا الحدّ أيضاً: في مركز المثلث المتساوي الأضلاع تساوي الزوايا الثلاث 30° تماماً، لذا لا يمكن استبدال 30° بزاوية أصغر. حالة المساواة في الادّعاء هي بالضبط حالة المساواة في المبرهنة.

الأستاذ خالد خطيب • متباينة إردوش-موردل